

به نام خدا

خلاصه ریاضی نهم و مقدمات ریاضی دهم (ویژه آمادگی تابستان)

فهرست

درس اول: مجموعه‌ها و اعداد حقیقی

درس دوم: توان و ریشه

درس سوم: عبارت‌های جبری و اتحادها

درس چهارم: خط و معادله خط

❖ درس اول

مجموعه‌ها و اعداد حقیقی

مجموعه تعریف ندارد و نمی‌توان تعریفی برای آن ارائه کرد فقط تعدادی از ویژگی‌های آن را می‌توان مشخص کرد. مجموعه‌ها را با حروف بزرگ نشان می‌دهیم و معمولاً بین دو آکولاد با نوشتن اعضا مشخص می‌شود اعضای مجموعه باید به طور دقیق مشخص باشد تا بتوان به آن عنوان مجموعه را اطلاق نمود.

*نکته: علامت عضویت $\in$ می‌باشد. تعداد اعضای مجموعه A را با $n(A)$ نشان می‌دهیم

مثال: با توجه به مجموعه A درستی یا نادرستی هر یک از عبارات زیر را مشخص کنید.

$$A = \{1, \{2, 3\}, 4\}$$

$$\{4\} \in A \quad \{2, 3\} \in A \quad 2 \in A \quad n(A) = 4$$

مثال: دو مجموعه زیر با هم برابرند مقدار x و y را بیابید.

$$\{x - 7, 3\} = \{4, y\}$$

مثال: دو مجموعه زیر با هم برابرند حاصل $a + b$ را بیابید.

$$\{2a-1, 3, 2^2\} = \{b, 5, \sqrt{9}\}$$

زیرمجموعه: مجموعه A زیرمجموعه B است هرگاه هر عضو A عضوی از B باشد و آن را با نماد $A \subseteq B$ نشان می‌دهیم

* نکته: اگر $A \subseteq B$ باشد آنگاه $A \cap B = A$ و $A \cup B = B$ می‌باشد.

* نکته: اگر A دارای n عضو باشد تعداد زیرمجموعه‌های آن برابر 2^n می‌باشد

مثال: همه زیرمجموعه‌های مجموعه $A = \{a, b, c\}$ را بنویسید

مثال: مجموعه A ، ۳۲ زیرمجموعه دارد تعداد اعضای A چند تاست.

مثال: مجموعه A ، ۶۴ زیرمجموعه دارد تعداد اعضای A چند تاست.

مجموعه اعداد:

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \quad \mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

$$E = \{2, 4, 6, \dots\} \quad O = \{1, 3, 5, \dots\} \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$P = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots\} \quad \mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$$

مثال: درستی عبارات زیر را مشخص کنید.

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{N}, P \subseteq \mathbb{Z}, \mathbb{N} \subseteq P, O \subseteq P, P \subseteq O, E \subset P$$

نمودار ون: اگر مجموعه‌ها را با استفاده از نمودارهای هندسی نمایش دهیم به آن نمودار ون می‌گوییم نمودار ون مجموعه اعداد به صورت زیر است.

اجتماع دو مجموعه: اجتماع A, B را با $A \cup B$ نشان می‌دهیم و اعضای آن حداقل عضو یکی از A یا B است

اشتراک دو مجموعه: اشتراک A, B را با $A \cap B$ نشان می‌دهیم و اعضای آن هم عضو A و هم عضو B است

تفاضل: تفاضل B از A را با نماد $A - B$ نشان می‌دهیم و اعضای آن هستند ولی عضو B نیستند یعنی اعضای A را که در B نیستند می‌نویسیم. یا به تعبیر دیگر اعضای که عضو A باشند ولی در اشتراک نباشند را می‌نویسیم.

مثال: اگر $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ و $B = \{4, 5, 6\}$ حاصل $A \cup B$ و $A \cap B$ و $A - B$ و $B - A$ را بنویسید.

مثال: ابتدا مجموعه‌های A, B, C را با نوشتن اعضا مشخص کنید سپس حاصل عبارات خواسته شده را بنویسید

$$A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x < 3\} \text{ و } B = \{2x + 1 \mid x \in \mathbb{N}, x < 3\} \text{ و } C = \{x - 1 \mid x \in \mathbb{Z}, -1 \leq x \leq 1\}$$

$$(A \cup B) - C$$

$$(A \cap C) \cup B$$

مثال: برای هر مجموعه داده شده نمودار ون مناسب رسم کنید.

$$A \cup B \text{ و } A \cap B \text{ و } A - B \text{ و } B - A \text{ و } (A \cup B) - C \text{ و } A \cup (B - C)$$



مثال: اعضای هر یک از مجموعه‌های زیر را بنویسید.

$$\mathbb{Z} - \mathbb{N}$$

$$W \cap \mathbb{N}$$

$$\mathbb{N} - W$$

$$P - \mathbb{N}$$

مجموعه مرجع: به مجموعه‌ای که شامل همه مجموعه‌های مورد بحث در سوال می‌باشد را مجموعه مرجع می‌گوییم و آن را معمولاً با حرف U نشان می‌دهیم.

متمم مجموعه: متمم مجموعه A ، همه اعضای از مجموعه مرجع هستند که در A نیستند. متمم مجموعه A را با نماد A' نشان می‌دهیم.

مثال: اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ و $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ مجموعه A' را بنویسید.

عددهای حقیقی: به کلیه اعدادی که تاکنون با آنها آشنا شده‌ایم عدد حقیقی می‌گوییم که به دو دسته گویا (قابل تبدیل به کسر) و گنگ (غیر قابل تبدیل به کسر) تقسیم می‌شوند.

نوشتن عدد گویا بین دو عدد گویا: برای نوشتن کسر بین دو عدد کسری، به دو روش می‌توان عمل کرد: ۱ - صورت‌ها را با هم و مخرج‌ها را با هم جمع کنیم. ۲ - ابتدا بین دو کسر مخرج مشترک بگیریم سپس اعداد را درج کنیم.

مثال: بین دو عدد $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{5}$ چهار عدد گویا درج کنید.

اعداد گنگ (اصم): اعدادی که نتوان آنها را به صورت کسر نشان داد گنگ نام دارند. مثلاً رادیکال اعدادی که مربع کامل نیستند یا عدد π و e و عدد لیوویل

مثال: کدام یک از اعداد زیر گویا و کدام یک گنگ است.

$$\sqrt{\frac{2}{2}}, \frac{\pi}{3}, \sqrt{3 \times 12}, \sqrt{4+9}, \frac{3}{14}, \frac{25}{0}$$

❖ درس دوم

توان و ریشه

توان: اگر عددی در خودش چند بار ضرب شود برای خلاصه‌نویسی از نماد توان استفاده می‌کنیم مثلاً

$$4 \times 4 \times 4 = 4^3$$

قوانین توان:

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

$$a^n \times b^n = (ab)^n$$

$$a^n \div a^m = a^{n-m}$$

$$a^n \div b^n = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$(a^n)^m = a^{nm}$$

مثال: حاصل هر یک از عبارات زیر را بنویسید.

$$3^5 \times 2^5 =$$

$$4^5 \times 4^3 =$$

$$8^3 \div 4^3 =$$

$$5^3 \div 5^2 =$$

*نکته: در جمع و تفریق اعداد توان دار قانون خاصی وجود ندارد فقط می توان با استفاده از تعداد آنها، آن را به ضرب تبدیل کرد.

مثال:

$$4^3 + 4^3 + 4^3 =$$

$$9^5 + 9^5 + 9^5 =$$

$$8^2 + 8^2 =$$

*نکته: هر عدد به توان صفر برابر یک است. $5^0 = 1$

توان منفی: برای مثبت کردن توان کافی است عدد پایه را معکوس کنیم یا در کسرهای بزرگ جای عدد را در صورت و مخرج عوض کنیم.

مثال: حاصل عبارات زیر را به دست آورید.

$$\frac{4^7 \times 3^{-6}}{3^3 \times 4^{-2}}$$

$$\frac{15^3 \times 3^{-3}}{25^{-2} \times 2^2}$$

$$\frac{12^0 \times (2^3)^2 \times 1^2}{3^5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$$

$$\left(\frac{4}{7}\right)^5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{-5}$$

ریشه گیری

ریشه دوم: اگر $a^2 = b$ باشد آنگاه a را ریشه دوم عدد b می نامیم. هر عدد مثبت دارای دو ریشه دوم که قرینه هم اند می باشد مثلا ۵ و -۵ ریشه های دوم عدد ۲۵ هستند. چون $(\pm 5)^2 = 25$

* نکته: ریشه دوم مثبت هر عدد را جذر آن عدد می‌نامیم و با نماد $\sqrt{\quad}$ نشان می‌دهیم مثلاً $\sqrt{25}$ برابر ۵+ است

نکت *ه: اعداد منفی جذر ندارند.

سوال: تفاوت $\sqrt{16}$ و ریشه دوم عدد ۱۶ چیست

* نکته: تنها عددی که یک ریشه دوم دارد عدد صفر است که همان جذر آن است یعنی $\sqrt{0} = 0$

ریشه سوم: اگر $a^3 = b$ باشد آنگاه a را ریشه سوم عدد b می‌نامیم. هر عدد حقیقی دارای یک ریشه سوم است که آن را با نماد $\sqrt[3]{\quad}$ نمایش می‌دهیم.

مثلاً ریشه سوم ۸ را با نماد $\sqrt[3]{8}$ نشان می‌دهیم که همان عدد ۲ است

جمع و تفریق رادیکالها:

برای جمع و تفریق عبارتهای رادیکالی، مقادیر زیر رادیکال و فرجه باید یکسان باشد در این صورت یکی از رادیکالها را می‌نویسیم و عدد پشت رادیکالها را جمع و یا تفریق می‌کنیم.

مثال: حاصل عبارات زیر را در صورت امکان بنویسید.

$$2\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$$

$$3\sqrt[3]{7} + 3\sqrt[3]{7}$$

$$2\sqrt{3} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{3}$$

$$3\sqrt{8} + 2\sqrt{18} + 3\sqrt{50}$$

ضرب و تقسیم رادیکالها: برای ضرب و تقسیم عبارتهای رادیکالی، کافی است تنها فرجه‌ها برابر باشند در این صورت اعداد پشت رادیکال باهم و اعداد زیر رادیکال باهم ضرب و تقسیم می‌شوند.

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$3\sqrt[3]{7} \times 3\sqrt[3]{7}$$

$$2\sqrt{3} \times 2\sqrt{5} \times 3\sqrt{2}$$

$$4\sqrt[3]{7} \div 2\sqrt[3]{3} \times 5\sqrt[3]{6}$$

❖ درس سوم

عبارت‌های جبری

یک جمله‌ای: عبارتی است که از ضرب اعداد و متغیر (حروف انگلیسی) تشکیل شده که توان متغیر باید عددی حسابی باشد. یعنی متغیر در مخرج نباشد و رادیکال نداشته باشد.

مثال: کدام عبارت یک جمله‌ای است

$$\sqrt{3}x^2y, 5\sqrt{x}, 3x^{-1}, \frac{4}{x}, 3 + 4y$$

درجه یک جمله‌ای: توان متغیر را درجه یک جمله‌ای می‌گوییم.

یک جمله‌ای‌های متشابه: اگر متغیرها و درجه آنها در دو یک جمله‌ای یکی باشد آن دو را متشابه می‌گوییم.

جمع و تفریق یک جمله‌ای‌ها

اگر دو یک جمله‌ای متشابه باشند با هم جمع و یا تفریق می‌شوند برای این کار باید متغیرها را به همان صورت نوشت و ضرایب را با هم جمع و یا تفریق کرد.

$$5x^2y + 4xy^2$$

$$3x^2y + 5x^2y - 2x^2y$$

ضرب و تقسیم یک جمله‌ای‌ها

برای ضرب و تقسیم یک جمله‌ای‌ها از قوانین توان استفاده می‌کنیم.

مثال: حاصل عبارات زیر را بنویسید

$$\frac{24x^2y^3z}{4xyz}$$

$$3x^2y(2x - 3y)$$

اتحادهای جبری

به هر تساوی که به ازای هر مقدار متغیر برقرار باشد اتحاد می‌گوییم

مثال: کدامیک از عبارات زیر اتحاد است

$$2x + y = 3x - y$$

$$3x = x + x + x$$

اتحادهای معروف

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad \text{اتحاد مربع دوجمله‌ای}$$

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$(2x + 3y)^2 =$$

$$(3x - 4y)^2 =$$

$$(2x - 5y)^2 =$$

$$(x + 3)^2 =$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \quad \text{اتحاد مزدوج}$$

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$(3x + 4y)(3x - 4y) =$$

$$(2x - 5y)(2x + 5y) =$$

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab \quad \text{اتحاد یک جمله‌ی مشترک}$$

مثال: حاصل عبارات زیر را بیابید.

$$(x + 3)(x + 4) =$$

$$(2x - 5)(2x + 4) =$$

$$(3x - 3)(3x + 7) =$$

تجزیه

تجزیه هر عبارت یعنی آن عبارت را به ضرب چند عبارت تبدیل کنیم که این کار به دو روش فاکتورگیری و اتحاد انجام می‌شود

الف) روش فاکتورگیری: برای فاکتورگیری مراحل زیر را انجام می‌دهیم.

۱- ب م اعداد و حروف مشترک با توان کمتر را، به عنوان عامل مشترک پشت پرانتز می‌نویسیم.

۲- همه عبارات را بر عامل مشترک تقسیم می‌کنیم و با همان علامت داخل پرانتز می‌نویسیم.

مثال: عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$25x^2y^3z^5 - 15xy^4z^3$$

$$4 \cdot xy^2a^3 + 16x^2ya^3z$$

ب) اتحادها: برای استفاده از اتحادها دو نوع سوال مطرح می‌شود.

۱- عبارت‌های دو جمله‌ای: اگر بین دو عبارت منفی باشد و توان هر دو عبارت زوج باشد با استفاده از اتحاد مزدوج تجزیه می‌شود.

۲- عبارت‌های سه جمله‌ای: با استفاده از اتحاد یک جمله‌ی مشترک تجزیه می‌شوند.

مثال: عبارات زیر را تجزیه کنید.

$$25x^2 - 49y^2$$

$$16x^2y^2a^4 - 64x^2$$

$$x^2 + 5x + 6$$

$$3x^2 + 2x - 8$$

$$4x^2 - 5x - 6$$

$$3x^2 + 8x + 8$$

$$5x^2 - 13x + 6$$

❖ درس چهارم

خط و معادله خط

رابطه جبری بین نقاط یک خط را معادله خط می‌گوییم که حالت استاندارد یک معادله خط به صورت $y = ax + b$ است که در آن a شیب و b عرض از مبدا نام دارد

مثال: شیب و عرض از مبدا خطوط زیر را بیابید.

$$2x + 4y = 5$$

$$3x - 4y = 7$$

رسم خط: برای رسم خط از جدول مقادیر خط استفاده می‌کنیم.

مثال: خطوط زیر را رسم کنید.

$$y = 2x + 3$$

$$y = 2x - 1$$

$$4y + 3x = 12$$

نوشتن معادله خط: برای نوشتن معادله خط انواع سوالات زیر می‌تواند مطرح شود

۱- با داشتن شیب و عرض از مبدا

۲- با داشتن شیب و یک نقطه

۳- با داشتن دو نقطه

۴- با داشتن نمودار خط

مثال: معادله خطی بنویسید که شیب آن ۳ و عرض مبدا آن ۲- باشد.

مثال: معادله خطی بنویسید که شیب آن ۳ و از نقطه (۲, ۴) بگذرد.

مثال: معادله خطی بنویسید که از دو نقطه (۳, ۵) و (۴, ۸) بگذرد.

خطوط خاص

۱- خطوط $y = a$ موازی محور x ها هستند و برای رسم آن باید عدد a را روی محور y ها پیدا کنیم و خطی موازی محور x ها رسم کنیم.

۲- خطوط $x = a$ موازی محور y ها هستند و برای رسم آن باید عدد a را روی محور x ها پیدا کنیم و خطی موازی محور y ها رسم کنیم.

مثال: خطوط $y = 3$ و $x = 2$ را رسم کنید.

*نکته: دو خط موازی دارای شیب یکسان اند و شیب دو خط عمود بر هم قرینه و معکوس هم اند.

مثال: معادله خطی بنویسید که از نقطه (۲, ۷) بگذرد و با خط $3y + 6x = 4$ موازی باشد.

مثال: معادله خطی بنویسید که از نقطه $(3, 4)$ بگذرد و بر خط $3x + 6y = a$ عمود باشد.

دستگاه معادلات خطی (دو معادله دو مجهول)

برای به دست آوردن جواب دستگاه دو معادله دو مجهول به روش حذفی، ابتدا ضریب یکی از متغیرها را در دو معادله با ضرب کردن عدد برابر می‌کنیم سپس با جمع یا تفریق طرفین دو معادله یکی از متغیرها حذف می‌شود که با استفاده از آن، یکی از متغیرها به دست می‌آید. با جایگذاری متغیر به دست آمده در یکی از معادلات، متغیر دیگر نیز محاسبه می‌شود.

مثال: جواب دستگاههای معادلات خطی زیر را بیابید.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 3x - y = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ -4x + y = -7 \end{cases}$$



