جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش
اداره کل آموزش و پرورش شهر تهران
دبیرستان غیردولتی پسرانهٔ موحد
منطقه ۵ شهر تهران

پایه : دوازدهم رشته : ریاضی	**نمونه سوالات** **نام درس :** گسسته	نام استاد : آقای پناهی فر

۱ چند عضو از مجموعه $S=\{n\in \mathbb{N} \mid 1\le n\le 630\}$ نه بر ۳ و نه بر ۵ بخشپذیرند؟

۲ معادله همنهشتی $4x \overset{6}{\equiv} 10$ را در صورت امکان حل کرده و مجموعه جواب آن به دست آورید.

۳ گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:
«برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $y^2+1 \ge -2x(y+x+1)$»

۴ درستی یا <u>نادرستی</u> گزاره‌های زیر را مشخص کنید.
الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، $\frac{1}{x}$ نیز عددی گنگ است.
ب) اگر $a|b+c$ آنگاه $a|b$ یا $a|c$.
پ) برای مقادیر حقیقی و ناصفر a و b به شرط آنکه $a+b\neq 0$ تساوی $\frac{1}{a+b}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ برقرار است.
ت) دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۶ وجود ندارد.

۵ دانشآموز در یک آزمون علمی شرکت کرده است، او به سؤالات ۵ امتیازی و ۳ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۴۲ امتیاز کسب کرده است. (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد.)
این دانشآموز به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را کسب کند؟

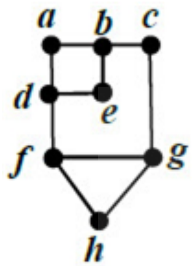
۶ به چند طریق می‌توان ۵ سیب را بین ۳ نفر توزیع کرد، به طوری‌که هر نفر حداقل یک سیب داشته باشد؟

۷ باقی‌مانده تقسیم عدد $A=27^{20}+18$ را بر ۱۳ بیابید.

۸ اگر عددی مانند k در Z باشد، به طوری که $5|4k+1$، ثابت کنید $25|16k^2+28k+6$.

۹ ثابت کنید برای هر عدد طبیعی <u>زوج</u> n، n^2-5n+7 عددی فرد است.

۱۰ معادله $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=15$ چند جواب صحیح نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_1>2$ و $x_4\ge 4$ باشد؟



۱۱ در گراف شکل زیر یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.

۱۲ گراف G، ۳- منتظم است و اندازه آن ۳ واحد کم‌تر از ۲ برابر تعداد رأس‌های گراف است. مرتبه گراف را به دست آورده و گراف G را رسم کنید.

۱۳ درست یا نادرست بودن جملات زیر را مشخص کنید.
الف) اگر $a|b$ و m,n دو عدد طبیعی باشند که $m \leq n$، آن‌گاه $a^m|b^n$.
ب) اگر $a|b$ آن‌گاه $(a,b)=a$.
پ) اگر $a \overset{m}{\equiv} b$ باشد، آن‌گاه باقی‌مانده‌های تقسیم دو عدد a و b بر m مساوی‌اند.
ت) منظور از حل معادله هم‌نهشتی، پیدا کردن همه جواب‌های حقیقی است که در معادله $\mathrm{ax} \overset{m}{\equiv} b$ صدق کند.

۱۴ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است.

۱۵ از بین اعداد طبیعی ۱ تا ۳۰۰، $(۱ \leq n \leq ۳۰۰)$ چند عدد وجود دارد که بر ۴ بخش‌پذیر است ولی بر ۵ بخش‌پذیر نیست؟

۱۶ ۵۴ شاخه گل را حداکثر در چند گلدان قرار دهیم تا اطمینان داشته باشیم گلدانی هست که در آن حداقل ۵ شاخه گل قرار گرفته است؟

۱۷ به چند طریق می‌توان ۴ کلاه متفاوت را بین ۳ نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل یک کلاه داده شود؟

۱۸ در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۳ نفر هم فوتبال، هم والیبال و هم بسکتبال بازی می‌کنند و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟

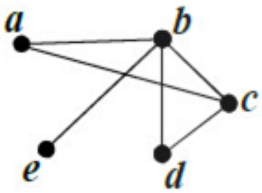
۱۹ یک گراف ۶ رأسی که $\gamma-$ مجموعه آن با اندازه یک باشد، رسم کنید.

۲۰ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = (۱۰۰۰)^{۲۵} \times ۹ + ۱۱$ را بر ۷ بیابید.

۲۱ به روش بازگشتی ثابت کنید حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است.

۲۲ حداقل چند نفر در یک سالن همایش حضور داشته باشند تا مطمئن باشیم دست کم ۳ نفر وجود دارند که دو حرف اول و دوم نام‌خانوادگی آن‌ها مانند هم و غیرتکراری است؟

۲۳ گراف G به صورت مقابل را درنظر بگیرید.
الف) درجه رأس e در گراف مکمل G چند است؟
ب) تمام دورهای موجود در گراف G را بنویسید.
پ) $\Delta(G)$ را مشخص کنید.



۲۴ اگر a عددی طبیعی باشد، حاصل $(۵a+۴,۲a+۳)$ را به دست آورید.

۲۵ فرض کنید $a,b\in\mathrm{Z}, m\in\mathrm{N}$ اگر $a\overset{m}{\equiv} b$ و $n\in\mathrm{N}$ ثابت کنید: $a^n\overset{m}{\equiv} b^n$.

۲۶ یک مربع لاتین چرخشی ۴×۴ بنویسید.

۲۷ گراف کامل K_p دارای ۱۰ یال است. ابتدا p را به دست آورید، سپس گراف را رسم کنید.

۲۸ قرار است سه کارگر $W_۱, W_۲, W_۳$ در سه روز متوالی با سه ماشین نخریسی و با ۳ نوع الیاف کار کنند، به گونه‌ای که هر کارگر با هر نوع ماشین و هر نوع الیاف دقیقاً یک بار کار کرده باشد و نیز هر الیاف در هر ماشین دقیقاً یک بار به کار رفته باشد. برای این منظور برنامه‌ریزی کنید.

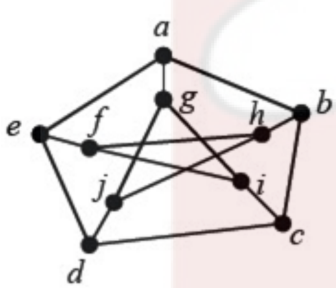
۲۹ ۴ دانشآموز پایه دهم و ۳ دانشآموز پایه یازدهم، به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند، به طوری‌که:
الف) هیچ دو دانشآموز هم پایه کنار هم نباشند. ب) همواره دانشآموزان پایه دهم کنار هم باشند.

۳۰ ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

۳۱ گراف G، ۶ رأسی ۳- منتظم است.
الف) اندازه گراف G را بیابید. ب) نمودار گراف G را رسم کنید.

۳۲ به چند طریق می‌توان از بین ۵ نوع گل، ۱۱ شاخه گل انتخاب کرد، اگر بخواهیم، از گل نوع دوم حداقل ۲ شاخه و از گل نوع پنجم بیش از ۳ شاخه انتخاب کنیم.

۳۳ عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.



۳۴ در گراف G، درجه رأس ۷ برابر با ۹ است و درجه رأس ۷ در گراف $\overline{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید.

۳۵ اگر باقی‌مانده تقسیم عدد a بر ۴ برابر ۳ باشد، در این صورت باقی‌مانده تقسیم عدد $۳ + a^۲$ بر ۸ را به دست آورید.

۳۶ گزاره درست را اثبات کنید و برای گزاره نادرست، مثال نقض ارائه دهید.
الف) مجموع هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است.
ب) اگر از مربع عددی فرد یک واحد کم کنیم، حاصل همواره بر ۸ بخش‌پذیر است.

۳۷ با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضو به یک مجموعه ۳ عضوی را به دست آورید.

۳۸ معادله $x_۱ + x_۲ + x_۳ + x_۴ + x_۵ = ۱۴$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد، به شرط آن‌که $x_۱ > ۲ ,\ x_۳ > ۳$ باشند.

۳۹ فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $\left[۲۱a^۲, ۳۵a^۳\right]$ را به دست آورید.

۴۰ اگر عدد طبیعی $a > ۱$، در دو شرط $a|۴k + ۹$ و $a|۶k + ۱۴$ صدق کند، مقدار a را بیابید.

۴۱ قرار است چهار مدرس $T_۱, T_۲, T_۳, T_۴$ در چهار جلسه متوالی در چهار کلاس $C_۱, C_۲, C_۳, C_۴$ به گونه‌ای تدریس کنند که هر مدرس در هر کلاس دقیقاً یک جلسه تدریس کند، برای این منظور برنامه‌ریزی نمایید.

۴۲ ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم به طوری که:
الف) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند.
ب) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند.
ج) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

۴۳ الف) گراف $p_۸$ را رسم کنید.
ب) یک $\gamma-$ مجموعه از آن‌را مشخص کنید.
ج) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۴ عضوی از آن‌را مشخص نمایید.

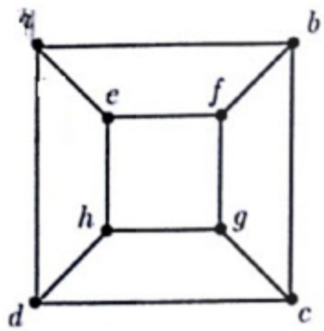
۴۴ گراف G با مجموعه رأس‌های $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ و مجموعه یال‌های زیر درنظر بگیرید:

$E = \{\mathrm{ab, bc, cd, ed, ae, cf, ef}\}$

الف) نمودار گراف را رسم کنید.
ب) $N_G[b]$ را مشخص کنید.
ج) یک مسیر به طول ۵ از b به d بنویسید.

۴۵ اگر عدد احاطه‌گری در یک گراف ۵ رأسی برابر یک باشد در این صورت $\Delta(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یال‌هایی را که گراف G می‌تواند داشته باشد مشخص کنید.

۴۶ در گراف شکل مقابل:
الف) یک مجموعه‌ی احاطه‌گر مینیمم مشخص کنید.
ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال مشخص کنید که مینیمم نباشد.



۴۷ جواب عمومی معادله $۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷$ را به دست آورید.

۴۸ اگر در یک سال، شنبه روز اول مهر باشد، در این صورت با استفاده از هم نهشتی تعیین کنید ۱۲ بهمن، در همان سال چه روزی از هفته است؟

۴۹ ۱۳ نفر در یک میهمانی حضور دارند. نشان دهید حداقل دو نفر از آن‌ها در یک ماه متولد شده‌اند.

۵۰ حکم زیر را به روش خواسته شده اثبات کنید.
برای هر دو عدد حقیقی مثبت y , x نشان دهید: $x + y \geq ۲\sqrt{xy}$ (اثبات بازگشتی)

۵۱ نشان دهید هر زیرمجموعه‌ای از مجموعه $S = \{۱, ۲, ۳, ۴, ۶, ۷, ۸, ۹\}$ که دارای ۵ عضو باشد، حداقل ۲ عضو دارد که مجموع آن‌ها برابر ۱۰ است.

۵۲ با استفاده از روش استدلالی برهان خلف ثابت کنید "$\sqrt{۳}$ عددی گنگ است."

۵۳ کدام‌یک از احکام زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ برای احکام نادرست مثال نقض ارائه دهید.
الف) هر دو زاویه متقابل به راس با هم برابرند.
ب) برای هر عدد طبیعی n ، $۲^n + ۱$ عددی اول است.

۵۴ با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید اگر x گویا و y گنگ باشد، آن‌گاه $(x + y)$ گنگ است.

۵۵ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از استدلال بازگشتی ثابت کنید:
$$a^۲ + b^۲ \geq ۲(b - ۱)$$

۵۶ با استدلال برهان خلف ثابت کنید اگر $\sqrt{۷}$ عدد گنگ و x عدد گویا است آنگاه $x + \sqrt{۷}$ عددی گنگ است.

۵۷ با استفاده از برهان خلف، ثابت کنید که $\sqrt{۳}$ گنگ است.

۵۸ پست‌خانه‌ای فقط تمبرهای ۶۰ ریالی و ۹۰ ریالی برای فروش دارد. شخصی برای فرستادن یک بسته که نیاز به ۸۷۰ ریال تمبر دارد از هر نوع تمبر چه تعداد باید بخرد. (تمام حالات ممکن برای خرید تمبر نوشته شود.)

۵۹ نشان دهید اگر $(a,b)=1$، آن‌گاه $(a,a-b)=1$.

۶۰ ثابت کنید بی‌نهایت عدد اول وجود دارند.

۶۱ ثابت کنید حاصل‌ضرب سه عدد طبیعی متوالی بر ۶ تقسیم‌پذیر است.

۶۲ دو دور به طول ۵ در این گراف بنویسید.

۶۳ مجموعه‌ی رئوس و مجموعه‌ی یال‌های گراف را مشخص کنید.

۶۴ تعداد جواب‌های صحیح $x_1+x_2+x_3=14$ با شرط $x_i>2$ برای $i=1,2,3$ را پیدا کنید.

۶۵ ثابت کنید اگر $b|c$، آن‌گاه $(a,b)=(a+c,b)$.

۶۶ مسیر از v_1 به v_3 بنویسید.

۶۷ نمودار این گراف را رسم کنید.

۶۸ اولاً: ثابت کنید اگر $a|b$ ، آن‌گاه $a|\mathrm{bc}$ $(a,b,c\in\mathrm{Z})$. ثانیاً: برای مقادیر صحیح c,b,a مثالی بیاورید که $a|\mathrm{bc}$ برقرار باشد ولی هر دو حکم $a|b$ و $a|c$ برقرار نباشد.

۶۹ رقم یکان $3^{25}+7^{73}$ را محاسبه کنید.

۷۰ اگر $a\mid b$ و $c\mid b$ و $(a,c)=1$ باشد، ثابت کنید: $\mathrm{ac}\mid b$

۷۱ a و b دو عدد صحیح که حداقل یکی از این دو ناصفر است. اگر برای هر m و n صحیح، $\mathrm{ma}+\mathrm{nb}=1$ باشد، ثابت کنید: $(a,b)=1$

۷۲ در یک گراف کامل تعداد رأس‌ها، $\frac{1}{3}$ تعداد یال‌هاست. مرتبه و اندازه‌ی این گراف را محاسبه کنید.

۷۳ برای این‌که این گراف بازه‌ای باشد، حداقل یال ممکن را رسم کنید.

۷۴ تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله‌ی $x_1+x_2+x_3=25$ با شرط $5\leqslant x_2<10$ و $6\leqslant x_1<9$ را محاسبه کنید.

۷۵ رقم یکان 7^{327} را محاسبه کنید.

۷۶ با استدلال برهان خلف ثابت کنید که اگر $\sqrt{۳}$ عددی گنگ است، $\sqrt{\sqrt{۳}+۲}$ نیز عددی گنگ است.

۷۷ معادله‌ی سیاله $۱۸x + ۳۰y = ۴۲$ را در z حل کنید.

۷۸ باقیمانده‌ی تقسیم $۲^{۲^{۵}}$ را بر ۱۷ به‌دست آورید.

۷۹ اگر a و b نسبت به هم اول باشند و $c \mid a+b$ ثابت کنید c نیز نسبت به a اول خواهد بود.

۸۰ چند عضو از مجموعه‌ی $A=\{n \in N \mid ۱ \leqslant n \leqslant ۱۲۶۲\}$ نه بر ۵ و نه بر ۳ بخش‌پذیر هستند؟

۸۱ می‌خواهیم رئوس G را طوری رنگ‌آمیزی کنیم که هیچ دو رأس مجاوری همرنگ نباشند. کم‌ترین تعداد رنگ را بیابید.

۸۲ آیا این گراف همیلتنی است؟ چرا؟

۸۳ پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ مفروض‌اند، ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از این پنج نقطه کم‌تر از $\sqrt{۲}$ است.

۸۴ عبارت زیر درست است یا نادرست ؟ برای عبارت نادرست مثال نقض بیاورید.
مربع هر عدد فرد به اضافه یک، عددی زوج است.

۸۵ جای خالی را با یکی از کلمات (شهودی - تمثیلی - استقرایی - استنتاجی) کامل کنید:
استدلال .... روش نتیجه‌گیری کلی با استفاده از حقایقی است که درستی آن‌ها را پذیرفته‌ایم.

۸۶ با استدلال استنتاجی، نشان دهید حاصل‌ضرب دو عدد صحیح زوج متوالی، مضرب ۸ است.

۸۷ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، مجموع مربعات دو عدد فرد، یک عدد زوج است.

۸۸ با استفاده از استدلال استنتاجی نشان دهید، اگر به مربع یک عدد فرد ۳ واحد اضافه کنیم، عددی مضرب ۴ به‌دست می‌آید.

۸۹ درون یک مربع به ضلع واحد، ۱۰ نقطه انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید حداقل فاصله‌ی دو نقطه از ده نقطه کمتر از $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ است.

۹۰ به روش اثبات بازگشتی ثابت کنید: $x^{۲}+y^{۲}+۱ \geqslant xy+x+y$

۹۱ اگر n عدد طبیعی و $n^{۲}$ مضرب ۳ باشد، آنگاه نشان دهید که n مضرب ۳ است. (برهان خلف)

۹۲ ۵۰ ورزشکار مرد در رشته‌های فوتبال، والیبال و بسکتبال از شهرهای تهران، مشهد، اصفهان و بوشهر در یک اردوی ورزشی شرکت کرده‌اند. ثابت کنید حداقل چند ورزشکار هم‌رشته و هم‌شهری هستند.

۹۳ اگر ۲۱۰ عدد طبیعی دلخواه و متمایز را بر ۲۰ تقسیم کنیم، حداقل چند عدد دارای باقیمانده‌ی یکسانی بر ۲۰ هستند؟ چرا؟

۹۴ ۱۳ نفر در یک مهمانی حضور دارند. نشان دهید حداقل ۴ نفر از آن‌ها در یک فصل متولد شده‌اند.

۹۵ ۲۰ عدد طبیعی دلخواه را بر ۶ تقسیم می‌کنیم، نشان دهید حداقل ۴ عدد آن‌ها باقیمانده‌ی مساوی دارند.

۹۶ با استفاده از استدلال استنتاجی ثابت کنید حاصل جمع دو عدد فرد، یک عدد زوج است.

۹۷ هفت نقطه داخل مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ مفروض‌اند. ثابت کنید حداقل فاصله دو نقطه از این هفت نقطه کمتر از $۲\sqrt{۲}$ است.

۹۸ ثابت کنید $\sqrt{۵}$ گنگ است. (برهان خلف)

۹۹ از ۸۰۰ نفر دانش‌آموزان یک مدرسه حداقل چند دانش‌آموز در یک روز سال متولد شده‌اند؟ چرا؟ (سال را ۳۶۵ روز در نظر بگیرید.)

۱۰۰ می‌دانیم $\sqrt{۳}$ عدد گنگ است. ثابت کنید عدد $\sqrt{۳}+۱$ گنگ است. (برهان خلف)

پاسخنامه تشریحی

۱ $|\overline{A \cup B}| = |s| - |A \cup B| = |s| - |A| - |B| + |A \cap B|$

$|s| = ۶۳۰, |A| = ۲۱۰, |B| = ۱۲۶, |A \cap B| = ۴۲ \Rightarrow |\overline{A \cup B}| = ۳۳۶$ (ص ۸۳)

۲ چون $(۱۲,۸)|۲۰$ معادله جواب دارد. (ص ۳۰)

$۴x \overset{۶}{\equiv} ۱۰ \Rightarrow ۴x \overset{۶}{\equiv} ۴ \Rightarrow x \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow x = ۳k + ۱$

۳ $y^۲ + ۱ \geq -۲x(y + x + ۱) \Leftrightarrow x^۲ + y^۲ + ۲xy + x^۲ + ۲x + ۱ \geq ۰ \Leftrightarrow (x+۱)^۲ + (x+y)^۲ \geq ۰$

$\Rightarrow$ این رابطه بازگشتی همواره بدیهی است (ص ۸ و ۷)

۴ الف) درست ب) نادرست پ) نادرست ت) درست

۵ $۵x + ۳y = ۴۲ \Rightarrow ۵x \overset{۳}{\equiv} ۴۲ \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow x \overset{۳}{\equiv} ۰ \Rightarrow x = ۳k \Rightarrow ۵(۳k) + ۳y = ۴۲ \Rightarrow y = -۵k + ۱۴$

$\Rightarrow \begin{cases} x = ۰ \\ y = ۱۴ \end{cases}; \begin{cases} x = ۳ \\ y = ۹ \end{cases}; \begin{cases} x = ۶ \\ y = ۴ \end{cases}$ (ص ۲۸)

۶ این سؤال معادل با پیدا کردن تعداد توابع پوشایی است که از مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضو می‌توان نوشت.

$۳^۵ - (۳ \times ۲^۵ - ۳) = ۲۴۳ - ۹۳ = ۱۵۰$ (ص ۷۸)

۷ $۲۷ = ۱۳ \times ۲ + ۱ \Rightarrow ۲۷ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow (۲۷)^{۲۰} \overset{۱۳}{\equiv} ۱, ۱۸ = ۱۳ \times ۱ + ۵, ۱۸ \overset{۱۳}{\equiv} ۵$

$\Rightarrow (۲۷)^{۲۰} + ۱۸ \overset{۱۳}{\equiv} ۱ + ۵ \Rightarrow r = ۶$ (ص ۲۱)

۸ $\begin{array}{l} ۵|۴k + ۱ \Rightarrow ۲۵|۱۶k^۲ + ۸k + ۱ \\ ۵|۴k + ۱ \Rightarrow ۲۵|۲۰k + ۵ \end{array} \xrightarrow{+} ۲۵|۱۶k^۲ + ۲۸k + ۶$ (ص ۱۶)

۹ $n = ۲k \Rightarrow n^۲ - ۵n + ۷ = ۴k^۲ - ۱۰k + ۶ + ۱ = ۲(۲k^۲ - ۵k + ۳) + ۱ = ۲q + ۱$ (ص ۴)

۱۰ $y_۱ = x_۱ - ۳, y_۱ \geq ۰, y_۴ = x_۴ - ۴, y_۴ \geq ۰$

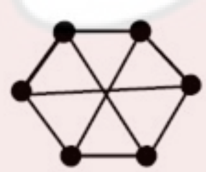
$y_۱ + ۳ + x_۲ + x_۳ + y_۴ + ۴ + x_۵ = ۱۵ \Rightarrow y_۱ + x_۲ + x_۳ + y_۴ + x_۵ = ۸$

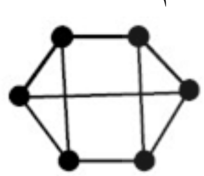
$\Rightarrow ج = \binom{۱۲}{۴}$ (ص ۷۱)

۱۱ $D = \{a, e, c, h\}$ (ص ۴۶)

۱۲ $q = ۲p - ۳ \Rightarrow \frac{۳p}{۲} = ۲p - ۳ \Rightarrow p = ۶$ (ص ۴۲)

به یکی از دو گراف زیر داده شود.





۱۳ الف) درست (ص ۱۶) ب) نادرست (ص ۱۳) پ) درست (ص ۲۹) ت) نادرست (ص ۲۴)

۱۴ برای این‌که مجموع دو عدد زوج باشد، هر دو عدد یا باید زوج باشند و یا هر دو فرد. بنابراین تعداد لانه‌ها برابر ۲ و تعداد کبوترها ۳ است. طبق اصل لانه کبوتری حداقل یک لانه وجود دارد که دو کبوتر در آن قرار می‌گیرد. یعنی حداقل دو عدد طبیعی از بین سه عدد وجود دارد که مجموعشان زوج خواهد شد. (ص ۸۳)

۱۵

$A=\{۱\leq n\leq ۳۰۰ | n=۴k (k\in \mathrm{N})\}\Rightarrow |A|=\left[\dfrac{۳۰۰}{۴}\right]=۷۵$

$B=\{۱\leq n\leq ۳۰۰ | n=۵k (k\in \mathrm{N})\}$

$A\cap B=\{۱\leq n\leq ۳۰۰ | n=۲۰k (k\in \mathrm{N})\}\Rightarrow |A\cap B|=\left[\dfrac{۳۰۰}{۲۰}\right]=۱۵$

$|A\cap B'|=|A|-|A\cap B|=۷۵-۱۵=۶۰$ (ص ۸۳)

۱۶

$k+۱=۵\Rightarrow k=۴, \mathrm{kn}+۱=۵۴\Rightarrow ۴n=۵۳, n=\left[\dfrac{۵۳}{۴}\right]=۱۳$ (ص ۸۲)

۱۷

کل $\xrightarrow{\text{هر کدام ۳ حالت}} ۳\times ۳\times ۳\times ۳=۳^{۴}=۸۱$

غ ق ق $\longleftarrow$ حداقل یکی نگیرد :

$n(\bar{۱}\cup \bar{۲}\cup \bar{۳})=n(\bar{۱})+n(\bar{۲})+n(\bar{۳})-n(\bar{۱}\cap \bar{۲})-n(\bar{۱}\cap \bar{۳})-n(\bar{۲}\cap \bar{۳})+n(\bar{۱}\cap \bar{۲}\cap \bar{۳})$

$=۳\times ۲^{۴}-۳\times ۱^{۴}+۰=۴۵$

$\Rightarrow$ کل جواب − غ ق ق $=۳۶$

۱۸

$|F|=۱۵, |V|=۱۱, |B|=۹, |F\cap V|=۵, |B\cap V|=۶, |F\cap B|=۳$

$\Rightarrow |F\cap B\cap V|=۳$

فقط فوتبال بازی کنند. $=|F|-|F\cap V|-|F\cap B|+|F\cap B\cap V|=۱۵-۵-۳+۳=۱۰$

فقط والیبال بازی کنند. $=|V|-|F\cap V|-|V\cap B|+|F\cap B\cap V|=۱۱-۵-۶+۳=۳$

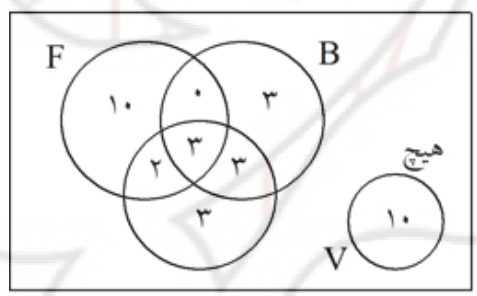
فقط بسکتبال بازی کنند. $=|B|-|F\cap B|-|V\cap B|+|F\cap B\cap V|=۹-۳-۶+۳=۳$

$\Rightarrow$ ج $=۱۰+۳+۳=۱۶$ (ص ۸۳)

روش دوم:

از نمودار ون کمک می‌گیریم. کافی است از اشتراک ۳ تایی شروع کنیم و به سمت اشتراک ۲ تایی و اعضای کلی مجموعه‌ها برسیم.

$\mathrm{M}=۳۴$



$\xrightarrow{\text{فقط یکی}} ۱۰+۳+۳=۱۶$

۱۹

(ص ۵۳)

۳۰

$۱۰۰۰\overset{۷}{\equiv}-۱\Rightarrow (۱۰۰۰)^{۲۵}\times ۹+۱۱\overset{۷}{\equiv}(-۱)^{۲۵}\times ۹+۱۱\overset{۷}{\equiv}۲\Rightarrow r=۲$ (ص ۲۱)

۳۱

$\mathrm{xy}\leq \dfrac{x^{۲}+y^{۲}}{۲}\Leftrightarrow ۲\mathrm{xy}\leq x^{۲}+y^{۲}\Leftrightarrow x^{۲}+y^{۲}-۲\mathrm{xy}\geq ۰\Leftrightarrow (x-y)^{۲}\geq ۰$

گزاره همواره درست (ص ۸)

۲۲ تعداد لانه‌ها $= n = ۳۲\times ۳۱ = ۹۹۲,\ k+۱ = ۳ \Rightarrow k = ۲$

تعداد کبوترها $= ۲\times ۹۹۲ + ۱ = ۱۹۸۵$ (ص ۸۲)

۲۳ الف) ۳ (ص ۳۸)

ب) b, d, c, b ، a, b, c, a ، a, b, d, c, a (ص ۳۸)

پ) ۴ (ص ۳۷)

۲۴ $(۵a+۴,\ ۲a+۳) = d \Rightarrow \begin{matrix} d|۲a+۳ \\ d|۵a+۴ \end{matrix} \Rightarrow d|-۲(۵a+۴)+۵(۲a+۳) \Rightarrow d|۷ \Rightarrow d = ۱$ یا ۷

(ص ۱۶)

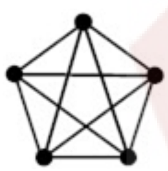
۲۵ $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow m|a-b \Rightarrow m|(a-b)(a^{n-۱}+a^{n-۲}b+\dots+b^{n-۱}) \Rightarrow m|a^n - b^n$

$\Rightarrow a^n \overset{m}{\equiv} b^n$ (ص ۲۹)

۲۶

۱	۲	۳	۴
۴	۱	۲	۳
۳	۴	۱	۲
۲	۳	۴	۱

(ص ۶۳)

۲۷ 

$\dfrac{p(p-۱)}{۲} = ۱۰ \Rightarrow p^۲ - p - ۲۰ = ۰ \Rightarrow p = ۵$ (ص ۴۲)

۲۸ برای برنامه‌ریزی دو مربع لاتین متعامد در نظر بگیریم. مربع A مربوط به ماشین‌ها و مربع B مشخص‌کننده الیاف است. (سوال ۱۴ ص ۷۲)

	$W_۱$	$W_۲$	$W_۳$
روز اول	۱	۳	۲
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۲	۱	۳

= A

	$W_۱$	$W_۲$	$W_۳$
روز اول	۲	۱	۳
روز دوم	۳	۲	۱
روز سوم	۱	۳	۲

$= \text{B} \Rightarrow$

	$W_۱$	$W_۲$	$W_۳$
روز اول	۱۲	۳۱	۲۳
روز دوم	۳۳	۲۲	۱۱
روز سوم	۲۱	۱۳	۳۲

عدد سمت چپ هر در آیه نشان‌دهنده ماشین و عدد سمت راست آن مشخص‌کننده نوع الیاف است.

۲۹ الف) $۳! \times ۴!$

ب) $۴! \times ۴!$ (مشابه مثال ص ۵۷)

۳۰ فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد، در این صورت داریم: *[خطای پردازش ریاضی]*

از طرفی *[خطای پردازش ریاضی]* و *[خطای پردازش ریاضی]* زوج‌اند. لذا *[خطای پردازش ریاضی]* باید زوج باشد. می‌دانیم تعداد زوج عدد فرد، حاصل زوج را تولید می‌کنند بنابراین تعداد اعضای A باید زوج باشد. (ص ۴۰)

۳۱ الف) (تعریف گراف $k-$ منتظم ص ۳۵) $۳\times۶ = ۲q \Rightarrow q = ۹$

ب) رسم یکی از گراف‌های مقابل کافی است.

۳۲ $x_۱+\ldots+x_۵ = ۱۱, x_۲ \geq ۲, x_۵ \geq ۴$ (قسمت پ تمرین ۸ ص ۷۱)

$x_۱ + y_۲ + ۲ + x_۳ + x_۴ + y_۵ + ۴ = ۱۱ \Rightarrow x_۱ + y_۲ + x_۳ + x_۴ + y_۵ = ۵$

$\Rightarrow \text{جواب} = \binom{۵+۵-۱}{۵-۱} = \binom{۹}{۴}$

۳۳ برای گراف مورد سوال داریم $\frac{۱۰}{۳+۱} = ۳ \leq \gamma(G) \Rightarrow \frac{n}{\Delta+1} \leq \gamma(G)$. از طرفی مجموعه $\{g,h,d\}$ یک مجموعه احاطه‌گر برای گراف است. لذا $\gamma(G) \leq ۳$. بنابراین $\gamma(G) = ۳$. (قسمت دوم کار در کلاس ص ۵۰)

۳۴ $\deg_G(v) + \deg_{\overline{G}}(v) = p-۱ \Rightarrow ۹+۱۲ = p-۱ \Rightarrow p = ۲۲$ (مساله ۱ ص ۳۸)

۳۵ $a = ۴q+۳ \Rightarrow ۲a+۳ = ۸q+۹ = ۸(q+۱)+۱ = ۸q'+۱ \Rightarrow r = ۱$ (مشابه مثال ص ۱۴)

۳۶ الف) نادرست (مشابه قسمت ت کار در کلاس ص ۳)

$\sqrt{۲}, -\sqrt{۲} \in Q^c, \sqrt{۲} + (-\sqrt{۲}) = ۰ \notin Q^c$

ب) درست (مسأله ۳ ص ۱۵)

$(۲k+۱)^۲ - ۱ = ۴k^۲ + ۴k + ۱ - ۱ = ۴k(k+۱) = ۴\times۲q = ۸q$

۳۷ $۱ \leq j \leq ۳ \quad A_j = \{f : A \to B | f(a_i) \neq b_j \quad ۱ \leq i \leq ۴\}$

$A = \{a_۱, a_۲, a_۳, a_۴\}, B = \{b_۱, b_۲, b_۳\}$

$|S| = ۳^۴, |A_i| = ۲^۴, |A_i \cap A_j| = ۱^۴, |A_۱ \cap A_۲ \cap A_۳| = ۰$

$|\overline{A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳}| = |S| - |A_۱ \cup A_۲ \cup A_۳| = ۸۱ - (۳\times۱۶ - ۳\times۱ + ۰) = ۳۶$ (ص ۷۷)

۳۸ $y_۱ + ۳ + x_۲ + y_۳ + ۴ + x_۴ + x_۵ = ۱۴ \Rightarrow y_۱ + x_۲ + y_۳ + x_۴ + x_۵ = ۷$

$\Rightarrow \binom{n+k-۱}{k-۱} = \binom{۱۱}{۴}$ (ص ۶۱)

۳۹ $A = ۲۱a^۲ = ۳\times۷\times a^۲, B = ۳۵a^۳ = ۵\times۷\times a^۳ \Rightarrow [A,B] = ۱۰۵a^۳$ (ص ۱۷)

۴۰ $\begin{matrix} a|۴k+۹ \\ a|۶k+۱۴ \end{matrix} \Rightarrow a|-۶(۴k+۹) + ۴(۶k+۱۴) \Rightarrow a|۲ \xrightarrow{a>۱} a = ۲$ (ص ۱۱)

۴۱ (ص ۷۳)

	۱	۲	۳	۴
C_1	T_1	T_2	T_3	T_4
C_2	T_4	T_1	T_2	T_3
C_3	T_3	T_4	T_1	T_2
C_4	T_2	T_3	T_4	T_1

۴۳
الف) $۶! \times ۴!$

ب) $۴! \times ۵!$

ج) $۷! \times ۳!$ (ص ۷۲)

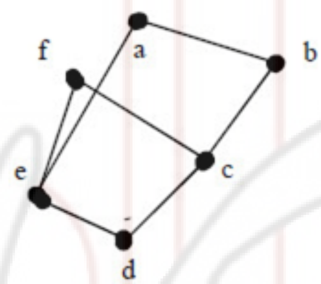
۴۳ الف)

ب) $\{a, d, g\}$

ج) $\{a, d, e, h\}$

(ص ۵۴)

۴۴ الف)

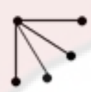


ب) $N_G[b] = \{a, b, c\}$

ج) b, a, e, f, c, d

(ص ۳۶ و ۳۹)

۴۵ زمانی که $\gamma = ۱$ باشد یعنی حداقل یک رأس از درجه $p - ۱$ داریم پس چون $p = ۵ \longrightarrow \Delta = ۴$

$\Delta = ۴ \xrightarrow{\text{حداقل یال}}$  $q = ۴$

$\Delta = ۴ \xrightarrow{\text{حداکثر یال}} k_۵ \to q = \binom{۵}{۲} = ۱۰$

۴۶ الف) $\{f, d\}$ (۰/۵) ب) $\{e, f, g, h\}$ (۰/۵) (صفحه: ۴۷)

۴۷ $۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۷ \to ۴x \overset{۵}{\equiv} ۲$ (۰/۲۵) $\to ۴x \overset{۵}{\equiv} ۲ + ۱۰$ (۰/۲۵) $\Rightarrow ۴x \overset{۵}{\equiv} ۱۲ \xrightarrow{(۴,۵)=۱} x \overset{۵}{\equiv} ۳$ (۰/۲۵)

$\Rightarrow x = ۵k + ۳$ (۰/۲۵) (صفحه: ۲۵)

۴۸ روز اول مهر، شنبه را برابر صفر در نظر می‌گیریم ۲۹ روز در مهر و سه ماه آبان و آذر و دی و ۱۲ بهمن، فاصله اول مهر تا ۱۲ بهمن است، پس داریم:

ج	پ	چ	س	د	ی	ش
۶	۵	۴	۳	۲	۱	۰

(۰/۲۵)

$۲۹+۳۰+۳۰+۳۰+۱۲=۱۳۱ \to ۱۳۱ \overset{۷}{\equiv} ۵$ (۰/۵)

که متناظر این عدد در جدول روز پنج‌شنبه را نشان می‌دهد. (۰/۲۵) (صفحه ۲۴)

۴۹ ۱۳ (تعداد دانشآموزان) تعداد کبوتر (۰/۲۵) و ۱۲ (تعداد ماه‌های سال) تعداد لانه است (۰/۲۵).
$۱۳=۱+۱\times۱۲$ (۰/۲۵). طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو نفر در یک ماه متولد شده‌اند. (۰/۲۵) تمرین صفحه ۳۰

۵۰
$(x+y)^۲ \geq ۴\,xy$ (۰/۲۵) $\Rightarrow x^۲+y^۲+۲\,xy \geq ۴xy \Rightarrow x^۲+y^۲-۲\,xy \geq ۰$ (۰/۲۵)
$\Rightarrow (x-y)^۲ \geq ۰$ (۰/۲۵)

رابطه بدیهی است و تمامی تمامی مراحل بازگشت‌پذیر است. (۰/۲۵) صفحه ۲۱

۵۱ اگر تعداد عضوهای زیرمجموعه را به منزله کبوتر $m=۵$ درنظر بگیریم (۰/۲۵) و کبوترها را تعداد مجموع هر دو عدد از S که به صورت زیر برابر ۱۰ می‌شود، $n=۴$ درنظر بگیریم (۰/۵)

$\{۱,۹\},\{۲,۸\},\{۳,۷\},\{۴,۶\}$

طبق اصل لانه کبوتری (۰/۲۵) حداقل ۲ عضو وجود دارد که مجموعه‌شان برابر ۱۰ می‌شود. صفحه ۳۰

۵۲ فرض خلف: فرض کنیم $\sqrt{۳}$ عددی گویا باشد. صفحه ۲۸
$\sqrt{۳}=\frac{a}{b},(a,b)=۱$ (۰/۲۵) $\Rightarrow a^۲=۳b^۲ \Rightarrow$ ۳ مضرب است $a^۲$ $\Rightarrow$ ۳ مضرب است a (۰/۲۵)
$\Rightarrow a=۳k \Rightarrow ۹k^۲=۳b^۲ \Rightarrow$ ۳ مضرب است $b^۲$ $\Rightarrow$ ۳ مضرب است b (۰/۲۵)
$\Rightarrow (a,b)\neq ۱$ تناقض (۰/۲۵)

۵۳ الف) درست (۰/۲۵) ب) نادرست (۰/۲۵) مثال نقض (۰/۵)

۵۴ فرض خلف: فرض می‌کنیم $(x+y)$ گنگ نباشد، بنابراین عددی گویا است.
$x+y=a$ گویا $\xrightarrow[۰/۲۵]{} y=a-x$ (۰/۲۵) یا $(y=a+(-x))$

می‌دانیم تفاضل (یا جمع) دو عدد گویا، عددی گویا است در نتیجه y گویا است. (۰/۲۵)
که این خلاف فرض مسأله است. پس فرض خلف باطل و حکم برقرار است. (۰/۲۵)

۵۵
$a^۲+b^۲ \geqslant ۲(b-۱) \Leftrightarrow a^۲+b^۲ \geqslant ۲b-۲ \Leftrightarrow a^۲+b^۲-۲b+۲ \geqslant ۰$ (۰/۲۵)
$\Leftrightarrow a^۲+b^۲-۲b+۱+۱ \geqslant ۰$ (۰/۲۵)
$\Leftrightarrow a^۲+۱+(b-۱)^۲ \geqslant ۰$ (۰/۲۵)

عبارت همواره درست است و تمام مراحل بازگشت‌پذیر می‌باشند. (۰/۲۵)

۵۶

$$\left.\begin{array}{l}\text{فرض } \sqrt{۷}\in Q' \quad , \quad x\in Q \\ \text{حکم } x+\sqrt{۷}\in Q'\end{array}\right\}$$ ۰/۲۵

$x+\sqrt{۷}=\dfrac{a}{b}\in Q \Rightarrow \sqrt{۷}=\dfrac{a}{b}-x \Rightarrow$ خلاف حکم

۰/۲۵

تفریق دو گویا، گویا است و مساوی گنگ نمی‌شود پس به تناقض رسیده یعنی حکم برقرار است. ۰/۲۵

۵۷ برهان خلف : $\sqrt{۳}\in Q \Rightarrow \sqrt{۳}=\dfrac{a}{b}, (a,b)=۱ \Rightarrow ۳=\dfrac{a^۲}{b^۲} \Rightarrow a^۲=۳b^۲ \Rightarrow (a=۳k)$

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

$\Rightarrow (۳k)^۲=۳b^۲ \Rightarrow ۹k^۲=۳b^۲ \Rightarrow (b=۳k') \Rightarrow (a,b)=۳$

۰/۲۵

پس a ، b هر دو مضربی از ۳ هستند و نسبت به هم اول نیستند، پس به تناقض رسیده و حکم اصلی درست است.

۰/۲۵

۵۸

$x=$ تعداد ریالی ۶۰
$y=$ تعداد ریالی ۹۰
$: ۶۰x+۹۰y=۸۷۰ \xrightarrow{\div ۳۰} ۲x+۳y=۱۹$

شرط جواب $(۶۰,۹۰)=۳۰|۸۷۰$

به پیمانه‌ی ۲ می‌رویم:

$\cancel{۲x}+\overset{۲}{\underset{۱}{\cancel{۳}}}y \overset{۲}{=} \underset{۱}{\cancel{۱۹}} : y \overset{۲}{=} ۱ \rightarrow y=۲k+۱ \geqslant ۰ : k \geqslant -\dfrac{۱}{۲} \xrightarrow{\text{اشتراک}} k=\begin{cases}۰\\۱\\۲\end{cases}$

$\xrightarrow{\text{جاگذاری}} x=-۳k+۸\geqslant ۰ : k\leqslant \dfrac{۸}{۳}$

$k=۰ : \begin{cases}x=۸\\y=۱\end{cases} \qquad k=۱ : \begin{cases}x=۵\\y=۳\end{cases} \qquad k=۲ : \begin{cases}x=۲\\y=۵\end{cases}$

۵۹ $(a,a-b)=d \Rightarrow \begin{cases}d|a\\d|a-b\end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \begin{cases}d|b\\ \text{از طرفی } d|a\end{cases} \Rightarrow d|\underbrace{(a,b)}_{۱} \Rightarrow d=۱$

توجه: $\begin{matrix}a|b\\a|c\end{matrix} \Rightarrow a|(b,c)$

۶۰ اثبات به روش برهان خلف: فرض کنیم $P_۱, P_۲, \dots, P_n$ تنها اعداد اول باشند.
عدد $m=P_۱\times P_۲\times\dots\times P_n+۱$ را در نظر می‌گیریم. m باید مرکب باشد یعنی یک مقسوم‌علیه اول مانند P_j دارد به‌طوری که $P_j|m$ و $P_j|P_۱\times P_۲\times\dots\times P_n$ بنابراین $P_j|m-(P_۱\times P_۲\times\dots\times P_n)$ پس $P_j|۱$ که ممکن نیست.

۶۱ می دانیم : $\binom{n}{k}\in N \Rightarrow \binom{n}{۳}=q\in N \Rightarrow \dfrac{n!}{۳!\times(n-۳)!}=q \Rightarrow \dfrac{n(n-۱)(n-۲)}{۳!}=q$

$\Rightarrow n(n-۱)(n-۲)=۳!\times q=۶q \Rightarrow ۶|\overbrace{n(n-۱)(n-۲)}^{\text{۳ عدد متوالی}}$

۶۳ $V_۱V_۲V_۳V_۴V_۶V_۱ , V_۲V_۳V_۴V_۵V_۶V_۲$

۶۳
$V=\{V_1,V_2,V_3,V_4,V_5,V_6\}$

$E=\{V_1V_2,V_1V_6,V_2V_3,V_2V_6,V_3V_4,V_4V_5,V_4V_6,V_5V_6\}$

۶۴
$x_i>2 : x_i \geqslant 3 \Rightarrow x_i-3\geqslant 0 \xrightarrow{\text{جاگذاری در معادله}} (y_1+3)+(y_2+3)+(y_3+3)=14$

$:\begin{cases} y_1+y_2+y_3=5 \\ y\geqslant 0\end{cases} \xrightarrow{\text{حسابی}} \binom{5+3-1}{3-1}=\binom{7}{2}=21$

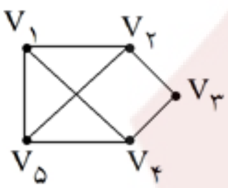
۶۵
$(a,b)=d \Rightarrow \begin{cases} d|a \\ d|b \overset{b|c}{\to} d|c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d|a+c \\ d|b \text{ از طرفی } \end{cases} \Rightarrow d|(a+c,b) : d|d' \quad \text{I}$

$(a+c,b)=d' \Rightarrow \begin{cases} d' | a+c \\ d' | b \overset{b|c}{\to} d' | c \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} \begin{cases} d' | a \\ d' | b \text{ از طرفی } \end{cases} \Rightarrow d' | (a,b) : d' | d \quad \text{II}$

$\underset{\text{II}}{\overset{\text{I}}{\to}} d=d'$

توجه:
$\begin{cases} \text{(1)}\ \begin{matrix} a|b \\ a|c \end{matrix} \Rightarrow a|\mathrm{bx}+\mathrm{cy} \\ \text{(2)}\ \begin{matrix} a|b \\ a|c \end{matrix} \Rightarrow a|(b,c) \end{cases}$

۶۶
$V_1V_2V_3, V_1V_4V_3, V_1V_5V_4V_3$

۶۷


۶۸ اولاً: $a| \Rightarrow b=\mathrm{aq} \quad (a,q\in \mathrm{Z})$

$\overset{\times c}{\to} \mathrm{bc}=a(\mathrm{cq})=\mathrm{aq}' \Rightarrow a|\mathrm{bc}$

ثانیاً: یک مثال $a=8, b=6, c=4 \Rightarrow 8|6\times 4$ ولی $8\nmid 6$ و $8\nmid 4$

۶۹
$$\begin{matrix} 3^2 \overset{10}{\equiv} -1 \Rightarrow 3^{24} \overset{10}{\equiv} 1 \Rightarrow 3^{25} \overset{10}{\equiv} 3 \\ 7^2 \overset{10}{\equiv} -1 \Rightarrow 7^{72} \overset{10}{\equiv} 1 \Rightarrow 7^{73} \overset{10}{\equiv} 7 \end{matrix} \Rightarrow 3^{25}+7^{73} \overset{10}{\equiv} 0$$

۷۰
$a\,|\,b \Rightarrow \exists q\in \mathrm{z}\ ;\ b=\mathrm{aq}$

$c\,|\,b \Rightarrow \exists t\in \mathrm{z}\ ;\ b=\mathrm{ct}$

$(a,c)=1 \Rightarrow \exists m,n\in \mathrm{z}\ ;\ \mathrm{ma}+\mathrm{nc}=1 \quad \overset{\times b}{\to} \mathrm{mab}+\mathrm{nbc}=b \Rightarrow$

$\mathrm{mact}+\mathrm{nacq}=b \Rightarrow \mathrm{ac}(\mathrm{mt}+\mathrm{nq})=b \Rightarrow \mathrm{ac}\,|\,b$

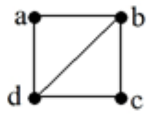
۷۱ فرض کنیم $d=(a,b)$ باشد، آن‌گاه داریم:

$\begin{matrix} d\,|\,a \Rightarrow d\,|\,\mathrm{ma} \\ d\,|\,b \Rightarrow d\,|\,\mathrm{nb} \end{matrix} \Rightarrow d\,|\,\mathrm{ma}+\mathrm{nb}=1 \Rightarrow d\,|\,1 \Rightarrow d=1$

۷۲ فرض کنید G یک گراف کامل مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q باشد.

$q=\dfrac{p(p-1)}{2}$ و $p=\dfrac{1}{3}q \Rightarrow p=\dfrac{p(p-1)}{6} \Rightarrow p^2-7\mathrm{p}=0 \Rightarrow p=7 \Rightarrow q=21$

۷۳



۷۴

$۰ \leqslant x_۱ - ۶ < ۳ \;;\; y_۱ = x_۱ - ۶ \Rightarrow x_۱ = y_۱ + ۶ \;, ۰ \leqslant y_۱ < ۳$

$۰ \leqslant x_۲ - ۵ < ۵ \;;\; y_۲ = x_۲ - ۵ \Rightarrow x_۲ = y_۲ + ۵ \;, ۰ \leqslant y_۲ < ۵$

$\Rightarrow y_۱ + ۶ + y_۲ + ۵ + x_۳ = ۲۵ \Rightarrow y_۱ + y_۲ + x_۳ = ۱۴ \; (*)$

$|A_۱|$: تعداد جواب های صحیح نامنفی $(*)$ با شرط : $\binom{۱۳}{۲}$

$y_۱ \geqslant ۳$

$|A_۲|$: تعداد جواب های صحیح نامنفی $(*)$ با شرط : $\binom{۱۱}{۲}$

$y_۲ \geqslant ۵$

$|S|$: تعداد جواب های صحیح نامنفی $(*)$ با شرط : $\binom{۱۶}{۲}$

معادله $*$

$|A_۱ \cap A_۲|$: تعداد جواب های صحیح نامنفی $(*)$ با شرط : $\binom{۸}{۲}$

$y_۱ \geqslant ۳ \,, y_۲ \geqslant ۵$ شرط

$|A_۱' \cap A_۲'| = |(A_۱ \cup A_۲)'| = |S| - |(A_۱ \cup A_۲)'| = \binom{۱۶}{۲} - \binom{۱۳}{۲} - \binom{۱۱}{۲} + \binom{۸}{۲} =$

$۱۲۰ - ۷۸ - ۵۵ + ۲۸ = ۱۵$

۷۵

$۷^۲ \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۷^۲)^{۱۶۳} \overset{۱۰}{\equiv} (-۱)^{۱۶۳} \Rightarrow ۷^{۳۲۶} \overset{۱۰}{\equiv} -۱ \xrightarrow{\times ۷} ۷^{۳۲۷} \overset{۱۰}{\equiv} -۷ \Rightarrow -۷ \overset{۱۰}{\equiv} ۳$

رقم یکان ۳ می‌باشد.

روش دوم: می‌دانیم $\begin{cases} a^{۴k+r} \overset{۱۰}{\equiv} a^r \\ r \neq ۰ \end{cases}$

$$۷^{۳۲۷} = ۷^{(۴ \times ۸۱ + ۳)} = ۷^{۴k+۳} \overset{۱۰}{=\!=} ۷^۳ = ۷^۲ \times ۷ = \overset{۹}{\cancel{۴۹}} \times ۷ \overset{۱۰}{=\!=} ۶۳ \overset{۱۰}{=\!=} ۳$$

۷۶

فرض خلف : $\sqrt{\sqrt{۳} + ۲} \notin Q' \Rightarrow \sqrt{\sqrt{۳} + ۲} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{۳} + ۲ = \frac{a^۲}{b^۲} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{a^۲}{b^۲} - ۲ \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{a^۲ - ۲b^۲}{b^۲}$

به تناقض رسیده‌ایم و همان حکم اولیه برقرار است.

۷۷

روش اول:

$۱۸x + ۳۰y = ۴۲ \Rightarrow ۳x + ۵y = ۷ \qquad (۳, ۵) = ۱ \Rightarrow ۱|۷$

$۳x = ۷ - ۵y \Rightarrow x = \frac{۶ + ۱ - ۶y + y}{۳} = ۲ - ۲y + \frac{۱ + y}{۳} \Rightarrow \frac{۱ + y}{۳} = m \Rightarrow m \in Z$

$y = ۳m - ۱ \;, x = ۴ - ۵m$

روش دوم:

$۱۸x + ۳۰y = ۴۲ \overset{\div ۶}{\rightarrow} ۳x + ۵y = ۷ \xrightarrow{\text{به پیمانه ۳ می رویم}}$

$\cancel{۳x} + ۵y \overset{۳}{\equiv} ۷ \Rightarrow -y \overset{۳}{\equiv} ۱ \Rightarrow y \overset{۳}{\equiv} -۱ \rightarrow y = ۳k - ۱$

۷۸

$$۲^۴ \overset{۱۷}{\equiv} -۱ \Rightarrow (۲^۴)^۶ \overset{۱۷}{\equiv} ۱ \Rightarrow ۲^{۲۵} \overset{۱۷}{\equiv} ۲$$

۷۹

$c|a+b \Rightarrow a+b=cq \Rightarrow b=cq-a$

$(a,b)=۱ \Rightarrow ma+nb=۱ \Rightarrow ma+n(cq-a)=۱ \qquad\qquad m,n \in Z$

$ma+ncq-na=۱ \Rightarrow (m-n)a+(nq)c=۱$

$m'a+n'c=۱ \Rightarrow (a,c)=۱$

۸۰

$|A_۱|=\left[\frac{۱۲۶۲}{۳}\right]=۴۲۰$ و $|A_۲|=\left[\frac{۱۲۶۲}{۵}\right]=۲۵۲$ و $|A_۱\cap A_۲|=\left[\frac{۱۲۶۲}{۳\times ۵}\right]=۸۴$

$|A_۱\cup A_۲|=|A_۱|+|A_۲|-|A_۱\cap A_۲|=۴۲۰+۲۵۲-۸۴=۵۸۸$

$|\overline{A_۱\cup A_۲}|=۱۲۶۲-۵۸۸=۶۷۴$

۸۱ کم‌ترین تعداد رنگ = ۴، مثلاً رئوس f,g قرمز و رئوس c,d آبی و رئوس b,e سبز و رأس a زرد.

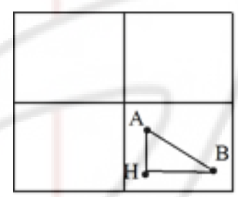
۸۳ بله چون دارای دور همیلتونی ad egbcfa است.

۸۳ سطح مربع را به ۴مربع مساوی تقسیم می‌کنیم. ۴ مربع را ۴ لانه و ۵ نقطه را ۵ کبوتر در نظر می‌گیریم ۰/۲۵ بنابر اصل لانه کبوتری حداقل دو تا از نقطه‌ها به یکی از مربع‌های کوچک تعلق دارند. ۰/۲۵

طول هر ضلع مربع کوچک یک واحد می‌باشد، با استفاده از قضیه‌ی فیثاغورس به دست می‌آید:

$(AB)^۲=(AH)^۲+(BH)^۲$ ۰/۲۵

$(AB)^۲<۱^۲+۱^۲ \Rightarrow (AB)^۲<۲ \Rightarrow AB<\sqrt{۲}$ ۰/۲۵



۸۴ درست ۰/۲۵

۸۵ استنتاجی ۰/۲۵

۸۶

$(۲K)(۲K+۲)=(۴K^۲+۴K)=۴K(K+۱)=۴(۲K')=۸K'$

۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵ ۰/۲۵

۸۷

$x=۲k+۱ \qquad y=۲k'+۱$

$x^۲+y^۲=(۲k+۱)^۲+(۲k'+۱)^۲ \Rightarrow x^۲+y^۲=۴k^۲+۴k+۱+۴k'^۲+۴k'+۱$ ۰/۲۵

$\Rightarrow x^۲+y^۲=۴k^۲+۴k'^۲+۴k+۴k'+۲ \Rightarrow x^۲+y^۲=۲(۲k^۲+۲k'^۲+۲k+۲k'+۱)$ ۰/۲۵

$\Rightarrow x^۲+y^۲=۲k''$ ۰/۲۵

۸۸

$x=۲k+۱$ ۰/۲۵

$x^۲+۳=(۲k+۱)^۲+۳=۴k^۲+۴k+۱+۳=۴(k^۲+k+۱)=۴k'$ ۰/۲۵

۰/۲۵ ۰/۲۵

۸۹ بنابر اصل لانه کبوتری ده نقطه را به منزله‌ی ده کبوتر و ۹ قسمت را به عنوان لانه در نظر می‌گیریم. چون ۹ > ۱۰ پس طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر درون یک لانه است.

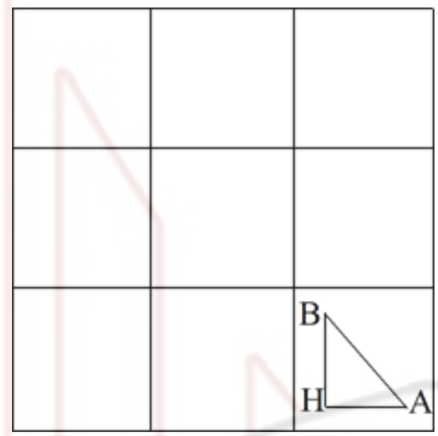
$$(AB)^۲ = (AH)^۲ + (BH)^۲$$

$$AH < \frac{۱}{۳} \text{ و } BH < \frac{۱}{۳}$$

$$(AB)^۲ < \frac{۱}{۹} + \frac{۱}{۹}$$

$$(AB)^۲ < \frac{۲}{۹}$$

$$AB < \frac{\sqrt{۲}}{۳}$$



۹۰

$$۲x^۲ + ۲y^۲ + ۲ \geqslant ۲xy + ۲x + ۲y \Leftrightarrow$$

$$(x^۲ - ۲xy + y^۲) + (x^۲ - ۲x + ۱) + (y^۲ - ۲y + ۱) \geqslant ۰ \Leftrightarrow$$

$(x-y)^۲ + (x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ \geqslant ۰$ بدیه‌ی است.

۹۱ از برهان خلف استفاده می‌کنیم و می‌گوییم اگر مضرب ۳ نباشد، پس:

$$n = ۳k+۱ \Rightarrow n^۲ = (۳k+۱)^۲ \Rightarrow n^۲ = ۹k^۲+۶k+۱ \Rightarrow n^۲ = ۳(۳k^۲+۲k)+۱ \Rightarrow n^۲ \neq ۳k'$$

$$n = ۳k+۲ \Rightarrow n^۲ = (۳k+۲)^۲ \Rightarrow n^۲ = ۹k^۲+۱۲k+۴ \Rightarrow n^۲ = ۳(۳k^۲+۴k+۱)+۱ \Rightarrow n^۲ \neq ۳k'$$

هر دو رابطه‌ی اخیر خلاف فرض هستند، پس حکم برقرار است.

۹۳

$m = ۵۰$ کبوتر

$n = ۳$ لانه (رشته ها) ۰/۲۵ $۵۰ = ۳ \times ۱۶ + ۲$ ۰/۲۵

حداقل هم رشته اند $۱۶ + ۱ = ۱۷$

$m = ۱۷$ کبوتر

$n = ۴$ لانه (شهرها) ۰/۲۵ $۱۷ = ۴ \times ۴ + ۱$ ۰/۲۵

حداقل هم شهری اند $۴ + ۱ = ۵$

طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۵ نفر هم‌رشته و هم شهری هستند. ۰/۲۵ (روش دوم)

$m = ۵۰$ کبوتر

$n = ۳ \times ۴ = ۱۲$ لانه ۰/۲۵ $۵۰ = ۴ \times ۱۲ + ۲$ ۰/۵

رشته شهر $۴ + ۱ = ۵$

طبق اصل لانه‌ی کبوتری حداقل ۵ نفر هم رشته و هم‌شهری هستند. ۰/۲۵

۹۳ می‌دانیم در تقسیم بر ۲۰ از صفر تا ۱۹ باقیمانده داریم، یعنی ۲۰ لانه، ۲۱۰ عدد را ۲۰ تا ۲۰ تا در لانه‌ها پخش می‌کنیم، اگر ۱۰ بار این کار را انجام دهیم در هر لانه ۱۰ عدد داریم، حال ۱۰ عدد مانده را نیز در لانه ها پخش می کنیم، طبق اصل لانه کبوتر، لانه‌ای داریم که در آن بیش از ۱۰ عدد یعنی حداقل ۱۱ عدد قرار دارد.

۹۴ یک سال ۴ فصل دارد یعنی ۴ لانه، ۱۳ نفر را ۴ تا ۴ تا در لانه‌ها پخش می‌کنیم، اگر این کار ۳ بار انجام دهیم در هر لانه ۳ نفر داریم، نفر ۱۳ طبق اصل لانه کبوتر در یکی از لانه ها قرار می‌گیرد، یعنی فصلی داریم که در آن بیش از ۳ نفر یعنی حداقل ۴ نفر به دنیا آمده‌اند.

۹۵ $S = \{a_۱, a_۲, a_۳, \dots, a_{۲۰}\} \qquad S \subseteq N$

$r = \{۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵\}$

می‌دانیم در تقسیم بر ۶ از صفر تا ۵ باقیمانده داریم، یعنی ۶ لانه. ۲۰ عدد را ۶ تا ۶ تا در لانه‌ها پخش می‌کنیم اگر سه‌بار این کار را انجام دهیم، در هر لانه ۳ عدد داریم، ۲ عدد مانده را نیز در لانه‌ها پخش می‌کنیم. پس طبق اصل لانه کبوتر، لانه‌ای داریم که در آن بیش از ۳ عدد موجود است یعنی حداقل ۴ عدد.

۹۶ فرض می‌کنیم x و y دو عدد فرد باشند در این صورت:

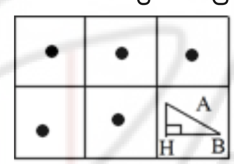
$$\left.\begin{array}{l} x = ۲k + ۱ \\ y = ۲k' - ۱ \end{array}\right\} \Rightarrow x + y = (۲k + ۱) + (۲k' - ۱) = ۲k + ۲k' + ۱ - ۱ = ۲k + ۲k' =$$

پس عددی زوج است $۲(k + k') = ۲k''$

۹۷ مستطیل را به ۶ مربع به ضلع ۲ تقسیم می‌کنیم. اگر ۷ نقطه را ۷ کبوتر و هریک از مربع‌ها را یک لانه در نظر بگیریم، بنا به اصل لانه کبوتر چون تعداد کبوترها (۷) بیش از تعداد لانه‌ها (۶) است پس حداقل ۱ لانه بیش از یک کبوتر دارد. پس حداقل دو نقطه داخل یک مربع قرار دارند. $AB^۲ = AH^۲ + HB^۲ \Rightarrow AH < ۲$ و $BH < ۲ \rightarrow AH^۲ + HB^۲ < ۸ \rightarrow AB^۲ < ۸$

$\Rightarrow AB < ۲\sqrt{۲}$

پس حداقل فاصله ۲ نقطه از این ۷ نقطه کمتر از $۲\sqrt{۲}$ است.



۹۸ از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم $\sqrt{۵}$ گنگ نباشد، پس گویاست.

$$\sqrt{۵} = \frac{p}{q} \quad p, q \in z \quad , q \neq ۰ \quad , (p, q) = ۱ \quad ۵ = \frac{p^۲}{q^۲} \quad \Rightarrow p^۲ = ۵q^۲$$

چون $p^۲$ مضرب ۵ است پس p هم مضرب ۵ است، یعنی $p = ۵k$ در نتیجه $p = ۲۵k^۲$

$$۲۵k^۲ = ۵q^۲ \quad \Rightarrow ۵k^۲ = q^۲$$

$q^۲$ مضرب ۵ است پس q هم مضرب ۵ است. در این صورت p و q هردو مضرب ۵ هستند و نمی‌توانند نسبت به هم اول باشند و این تناقض است پس خلاف حکم نادرست و حکم درست است. یعنی $\sqrt{۵}$ گنگ است.

۹۹ هر سال ۳۶۵ روز است. اگر دانش‌آموزان را به منزله کبوتر و روزهای سال را به منزله لانه کبوتر در نظر بگیریم ، ابتدا در پخش‌ترین حالت ۳۶۵ نفر را در لانه‌ها (در هر لانه یکنفر) قرار می‌دهیم، اگر این کار را دوبار انجام دهیم خواهیم داشت $۷۳۰ = ۲ \times ۳۶۵$ و در هر لانه ۲ نفر خواهیم داشت، حال ۷۰ نفر مانده را نیز در لانه‌ها پخش می‌کنیم، پس طبق اصل لانه کبوتر، لانه‌ای داریم که در آن سه کبوتر قرار دارد.

۱۰۰ از برهان خلف استفاده می‌کنیم پس اگر $۱ + \sqrt{۳}$ اصم نباشد، گویا است:

$$\left\{\begin{array}{l} a \text{ و } b \in Z \\ b \neq ۰ \end{array}\right. \Rightarrow ۱ + \sqrt{۳} = \frac{a}{b} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{a}{b} - ۱ \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{a - b}{b} \Rightarrow \sqrt{۳} = \frac{p}{q} \in Q \Rightarrow \text{تناقض}$$

فرض خلف باطل است، و حکم برقرار است یعنی $۱ + \sqrt{۳}$ گنگ است.