

الف) نادرست	ب) نادرست	پ) نادرست	ت) درست (هر مورد ۰/۲۵)	۱
-۲	۴	A	$\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$ یا $ A \neq 0$	۱
-۳	$a_{12} = 0, a_{21} = -2, a_{22} = 6$		(هر مورد ۰/۲۵)	۰/۷۵
-۴		$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$	$A^T + B^T + 2AB = 0$	۱/۲۵
		$\Rightarrow 2A - B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$	$\frac{k=3}{m+2=0} \Rightarrow m=-2$	
-۵			$X + \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow X = \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$	۱/۲۵
-۶			$\begin{bmatrix} x & 2 & 1 \\ -1 & -x & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$ $\begin{bmatrix} -x-1 & -2x-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow [-x-1-x] = 0 \Rightarrow -x(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$	۱/۷۵
-۷			$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (هر مورد ۰/۵)	۱
-۸			$A^T = A \Rightarrow A^T - A = 0 \Rightarrow A(A - I) = 0 \Rightarrow \begin{cases} A = 0 \\ A = I \\ A \neq 0, A \neq I \end{cases}$ مانند دو ماتریس سوال ۷، یعنی لزوماً به تساوی $A = I$ نمی‌رسیم. ۱ نمره مثال نقطه هم آورده شود، درست است مانند:) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = A, A \neq I$	۱/۵
-۹			فرض می‌کنیم ماتریس A دارای دو ماتریس وارون C, B باشد. بنابر تعریف ماتریس وارون داریم: $\begin{cases} AB = BA = I \\ AC = CA = I \end{cases} \quad \begin{array}{l} ۰/۲۵ \\ ۰/۲۵ \end{array}$ $B = BI = BAC = IC = C \quad \begin{array}{l} ۰/۲۵ \\ ۰/۲۵ \end{array}$ کافی است ثابت کنیم $B = C$	۱/۲۵

۱/۵	$A^r = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} - \beta \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(+)}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & 2\alpha \\ 2 & -\alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \beta & 2\beta \\ 2 & -\beta \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha - \beta & 2\alpha \\ 2 & -\alpha - \beta \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(+)}} \begin{cases} 2\alpha = 2 \\ \alpha - \beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1, \beta = -1$	-۱۰
۱/۷۵	$A^r = A \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ $A^r = A^r \cdot A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = -I \Rightarrow A^r = -I$ $\Rightarrow A^r = (A^r)^r \cdot A = (-I)^r \cdot A = -IA = -A \Rightarrow A^r = -I$	-۱۱
۱/۶	$A^r = A \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ $A^3 = A^r \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^r = -$ $\Rightarrow A^n = -, n \geq 3$ $\Rightarrow A + A^r + A^r + \dots + A^{n-2} = A + A^r = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$	-۱۲
۰/۷۵	$\begin{cases} mx+y=1 \\ 3x+2y=5 \end{cases} \xrightarrow{\text{دستگاه فاقد جواب}} \frac{m}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = \frac{3}{2}$	-۱۳
۲/۲۵	<p style="text-align: right;">از آنجا که $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{5}$ است، دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد.</p> $AX=B \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad X=A^{-1} \cdot B, A =2 \times (-5) - 1 \times 3 = -13$ $A^{-1} = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(+)}} X = \frac{1}{-13} \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(+)}} \begin{bmatrix} -39 \\ -26 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$	-۱۴
۱/۵	<p style="text-align: right;">نخست دترمینان A را به روش ساروس به دست می‌آوریم.</p> $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{(+)}}$ $\Rightarrow A = (1+0+0) - (0+2-1) = 2$ $\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ A } = \frac{1}{2}$ $ 3A^{-1} = 3^3 A^{-1} = 27 \times \frac{1}{3} = 9$	-۱۵