

نمونه سوالات تشریحی ویژه امتحان نهایی آمار و احتمال

محمد علی رضائی

۱ اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره زیر را به دست آورید.
 $(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \vee q)$

۲ ابتدا مشخص کنید کدام یک گزاره است و سپس ارزش آن را مشخص کنید.

الف) عدد $\frac{\sqrt{3}}{3}$ گنگ است.

ب) امروز هوا چطور است؟

ج) عدد $(-1)^n$ عددی منفی است $(n \in \mathbb{N})$.

د) چلومرغ خوشمزه تر از چلوکباب است.

ه) عدد 5^{10} ، عدد بسیار بزرگی است.

۳ گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای $\exists, \forall$ بنویسید و ارزش هریک را با ذکر دلیل مشخص کنید.
الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.

ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم: $a^2 < 0$.

پ) همه‌ی اعداد اول فرداند.

ت) عدد صحیح مثبتی وجود دارد مانند x به طوری که $1 - 2x > 5$

ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگتر یا مساوی ۲ است.

ج) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم $x^2 = x$.

۴ ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۳ است.

۵ جدول ارزش‌های هریک از گزاره‌های زیر را رسم کنید.

الف) $p \wedge \sim q$ ب) $\sim p \wedge p$

پ) $\sim p \vee p$ ت) $(p \vee q) \wedge \sim p$

ث) $(p \vee q) \Leftrightarrow q$ ج) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

۶ نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) $4 \leq 3$

ب) ابوالوفای بوزجانی، ریاضی‌دان ایرانی است.

پ) $a \in \{b, c, d\}$

ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویاست.

ث) خورشید به دور زمین می‌چرخد و سنندج مرکز استان کردستان است.

ج) اگر ۳ زوج باشد، آن‌گاه ۲ فرد است.

۷

- از جملات زیر کدامیک گزاره است، ارزش گزاره‌ها را مشخص کنید.
- الف) خیام پزشک ایرانی است. ب) افلاطون فیلسوف یونانی است.
- پ) $3 + 5 > 6$ ت) تخته‌سیاه را پاک کنید.
- ث) $\{1\} \in \{1, 2, 3, 4\}$ ج) چه باران شدیدی می‌آید.
- چ) عدد ۱۹۱۷ عددی اول است. ح) $\emptyset \notin R$
- خ) $\sqrt{2} \in \mathbb{Z}$ د) عدد $5^9 + 8$ عددی اول است.
- ذ) به امید کامیابی شما. ر) آمار، مجموعه‌ای از اعداد، ارقام و اطلاعات است.

۸

- جای خالی را کامل کنید.
- الف) درست یا نادرست بودن یک گزاره را می‌گوییم.
- ب) اگر $A = \{1, \{1\}, \phi\}$ باشد، A $\{\{1\}\}$.
- پ) شناخت جامعه نامعلوم با استفاده از نمونه‌های معلوم در علم مورد بررسی قرار می‌گیرد.
- ت) اگر برای دو پیشامد A, B داشته باشیم $A \cap B \neq \phi$ آن‌گاه A, B را می‌گوییم.

۹

- اگر به تعداد اعضای یک مجموعه ۲ عضو اضافه شود، آنگاه به تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۸ واحد اضافه می‌شود. تعداد اولیه اعضای مجموعه را به دست آورید.

۱۰

- دو مجموعه $A \neq \emptyset$ و B را چنان مثال بزنید که $A \subseteq B$ و $A \in B$ باشد.

۱۱

- با توجه به مجموعه‌های داده شده، نمودار هریک از حاصل ضرب‌های $A \times B$ و $B \times A$ را رسم کنید.
- الف) $A = \{2, 3\}, B = \{2, 3, 4\}$ ب) $A = \{3, 4\}, B = \{1, 5\}$
- پ) $A = [2, 6], B = [3, 8]$ ت) $A = \mathbb{N}, B = [1, 4]$
- ث) $A = \mathbb{R}, B = \{2, 3\}$

۱۲

- هریک از عبارتهای زیر را ساده کنید:

- الف) $(A' \cap B) \cup ((B \cap A) - B') \cap (B \cup A)$
- ب) $(A \cup B) - B$
- پ) $[(A \cup B) - A] \cup (A \cap B)$

۱۳

- درستی هریک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

- الف) $(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow X = U$
- ب) $(A - B) \cup (A \cap B) = A$
- پ) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$
- ت) $(A - B) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$
- ث) $(A \cup B) \cap (A' \cap B') = \emptyset$
- ج) $[(A \cup B) = (A \cup C) \wedge (A \cap B) = (A \cap C)] \Rightarrow B = C$

۱۴

- درستی هریک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

- الف) $(A \cap B) \cup (B' \cap A) = A$ ب) $(A' \cap B') \cap A = \emptyset$
- پ) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap (A \cap C)$ ت) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$

۱۵

- با استفاده از تعریف اشتراک، اجتماع و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری برای ترکیب عطفی و فصلی در گزاره‌ها، هریک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

- الف) $A \cap B = B \cap A$
- ب) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
- پ) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

۱۶ هرگاه A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A \cap B = \emptyset$ در این صورت ثابت کنید:
الف) $B - A = B$ ب) $B \subseteq A'$

۱۷ اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن 384 واحد کم می‌شود، مجموعه‌ی A چند زیرمجموعه دارد؟

۱۸ کدامیک از مجموعه‌های زیر با هم مساوی‌اند؟

$$\begin{aligned} A &= \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < 2\} & B &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = x\} \\ C &= \{y \in \mathbb{Z} \mid y^2 \leq 2y\} & D &= \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 \leq 1\} \\ E &= \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 + 2m = 3m^2\} \end{aligned}$$

۱۹ اگر $A = \{x \mid -2 < 3x - 5 < 4\}$ و $B = \{y \mid y^2 - y - 2 = 0\}$ باشد، آن‌گاه هریک از حاصلضرب‌های $A \times B$ و $B \times A$ را رسم کنید.

۲۰ اگر $A = N$ و $B = [1, 4]$ باشد، مطلوبست نمودار حاصلضرب‌های $A \times B$ و $B \times A$.

۲۱ اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 2\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R}, x \geq 1\}$ باشند، نمودار حاصلضرب دکارتی $A \times B$ را رسم کنید.

۲۲ به کمک جبر مجموعه‌ها ثابت کنید:
 $A - (B \cup C) = (A - B) - C$

۲۳ اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 \leq x \leq 3\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 4\}$ نمودار $A \times B$ را در صفحه مختصات نمایش دهید.

۲۴ به کمک جبر مجموعه‌ها تساوی‌های زیر را ثابت کنید:
الف) $(A - B) \cap C = (A \cap C) - B$ ب) $(B - A) \cup (A \cap B) = B$

۲۵ مجموعه $A = \{x \mid x \in N, 2 \leq x < 5\}$ و $B = \{x \mid x \in N, 3 < x \leq 4\}$ مفروض است. حاصلضرب دکارتی $A \times B$ را نوشته و نمودار آن را رسم کنید.

۲۶ یک تیم والیبال ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دوعضوی برابر نیست. فرض کنید آن‌ها یکی پس از دیگری وارد سالن می‌شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قد آن‌ها اهمیت داشته باشد، فضای نمونه را توصیف کنید. اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال این‌که اولین کسی که وارد می‌شود، بلندقدترین عضو تیم باشد چه قدر است؟

۲۷ احمد و عباس با هم یک مرتبه سنگ، کاغذ، قیچی بازی می‌کنند. فضای نمونه برای این بازی چیست؟ فضای نمونه چند عضو دارد؟ در چه تعداد از برآمدها احمد برنده‌ی بازی است؟

۲۸ اگر $P(A) = \frac{2}{5}$ ، $P(B') = \frac{3}{5}$ و $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$ مطلوب است:
الف) $P(A \cup B)$ ب) $P(A - B)$

۲۹ اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه‌ی یک آزمایش تصادفی و $A = \{a, b\}$ و $B = \{a, b, c, d\}$ و $C = \{a, b, e\}$ به طوری که $P(A) = 0.3$ و $P(B) = 0.6$ باشند $P(C')$ را بیابید.

۳۰ از مجموعه‌ی $S = \{1, 2, 3, \dots, 50\}$ عددی به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال این‌که عدد انتخابی بر ۷ بخش‌پذیر باشد، چه قدر است؟

۳۱ با ارقام ۲، ۳، ۶، ۷، ۹ و به صورت تصادفی عددی ۴ رقمی (بدون تکرار) به وجود می‌آید. احتمال آن‌که عدد ساخته شده زوج باشد را بیابید.

۳۲ در یک تجربه تصادفی، $S = \{x, y, z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x)$ ، $P(y)$ و $P(z)$ یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت $\frac{1}{4}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هر کدام از این پیشامدها را به دست آورید.

۳۳ اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A = \{a, b\}$ ، $B = \{a, b, c, d\}$ و $C = \{a, b, e\}$ سه پیشامد باشند به طوری که $P(A) = \frac{2}{7}$ و $P(B) = \frac{3}{5}$ ، مقدار $P(C)$ را به دست آورید.

۳۴ اگر $S = \{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A = \{a, b\}$ ، $B = \{a, b, c, d\}$ و $C = \{a, b, e\}$ سه پیشامد باشند به طوری که $P(A) = \frac{3}{7}$ ، $P(C) = \frac{3}{5}$ باشد، مقدار $P(B)$ را به دست آورید.

۳۵ در پرتاب یک سکه ناسالم، احتمال آمدن رو، نصف احتمال آمدن پشت است. در پرتاب این سکه احتمال ظاهر شدن «رو» و احتمال ظاهر شدن «پشت» را به دست آورید.

۳۶ سه شناگر A، B و C با هم مسابقه می‌دهند. احتمال پیروز شدن شناگر A و B مساوی است و دو برابر احتمال برد C است. احتمال این‌که در این مسابقه A پیروز نباشد، چه قدر است؟

۳۷ اگر فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی $S = \{1, 2, 3\}$ باشد و $P(1) = a^2$ و $P(3) = 2P(2) = a$ مقدار a و $P(2)$ را بدست آورید.

۳۸ سه اسب a، b و c با هم مسابقه می‌دهند. اسب‌های a و c دارای احتمال بردن مساوی هستند و شانس b، دو برابر شانس بردن a است. احتمال آن‌که دو اسب a یا b ببرند را به دست آورید.

۳۹ تاسی به‌گونه‌ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد اول، سه برابر احتمال وقوع هر عدد غیراول است، اگر در پرتاب این تاس A پیشامد وقوع عدد کوچک‌تر از ۴ باشد، احتمال وقوع پیشامد A را محاسبه کنید.

۴۰ اگر $s = \{a, b, c, d\}$ فضای نمونه‌ای یک تجربه تصادفی باشد و داشته باشیم:
 $p(a) = 3p(b)$ ، $p(c) = \frac{1}{2}$ ، $p(d) = \frac{1}{8}$ ، $p(a')$ ، $p(b)$ مطلوبست محاسبه‌ی

۴۱ سه نفر دنده a و b و c در یک مسابقه شرکت می‌کنند، احتمال برد a نصف احتمال برد b و احتمال برد b $\frac{1}{3}$ احتمال برد c است:

الف) احتمال برد هر یک از دنده‌ها را بیابید.
 ب) احتمال آن‌که b یا c برنده شوند را تعیین کنید.

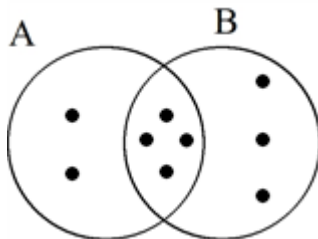
۴۲ جعبه A شامل ۵ مهره آبی، ۳ مهره سبز و ۴ مهره قرمز است و جعبه B شامل ۳ مهره آبی، ۴ مهره سبز و ۵ مهره قرمز است. از جعبه A به تصادف یک مهره را انتخاب کرده، در جعبه B قرار می‌دهیم. سپس یک مهره از جعبه B انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه مهره خارج شده از جعبه B سبز باشد را حساب کنید. (مهره‌ها همگی متمایز هستند.)

۴۳ در یک جعبه، ۴ ساعت از نوع A، ۳ ساعت از نوع B و ۵ ساعت از نوع C موجود است و احتمال اینکه عمر آن‌ها از ۲۰ سال بیشتر باشد، برای نوع A، $\frac{3}{5}$ و برای نوع B، $\frac{2}{3}$ و برای نوع C، $\frac{1}{2}$ است. به تصادف یک ساعت از این جعبه انتخاب می‌کنیم. با چه احتمالی عمر ساعت بیش‌تر از ۲۰ سال است؟

۴۴ در جعبه‌ای ۶ مهره قرمز و ۴ مهره آبی وجود دارد. دو مهره به‌طور متوالی و بدون جایگذاری بیرون می‌آوریم. احتمال آنکه مهره اول آبی و مهره دوم قرمز باشد، چقدر است؟

۴۵ در بین دانش‌آموزان یک کلاس، احتمال آنکه فردی در تیم فوتبال مدرسه باشد، $\frac{3}{10}$ و احتمال آنکه یک عضو تیم فوتبال معدل بالای ۱۹ داشته باشد، $\frac{4}{10}$ است. دانش‌آموزی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. احتمال آنکه عضو تیم فوتبال و معدل بالای ۱۹ داشته باشد، چقدر است؟

۴۶ با توجه به شکل مقابل $P(A|B)$ و $P(B|A)$ را حساب کنید.



۴۷ جدول زیر را کامل کنید؟ (A و B مستقل هستند.)

P(A)	P(B)			P(A B)	P(B A)
۰/۶		۰/۸			

۴۸ یک شرکت بیمه، بیمه‌گزاران خود را به دو گروه تقسیم کرده است؛ گروه «پرخطر» که در یک سال با احتمال $\frac{4}{10}$ تصادف می‌کنند و گروه «کم‌خطر» که احتمال تصادف کردن آن‌ها در یک سال $\frac{2}{10}$ است. می‌دانیم که ۳۰ درصد از بیمه‌گزاران پرخطرند.

الف) احتمال این‌که یک بیمه‌گزار در سال آینده تصادف کند را به دست آورید.

ب) اگر یک بیمه‌گزار در سال گذشته تصادف کرده باشد، احتمال این‌که جزء گروه پرخطر باشد چقدر است؟

۴۹ فرض کنید از بین چهار کارت با شماره‌های ۱ تا ۴، کاردی را به تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر ۲ بار رو بیاید، احتمال این‌که شماره‌ی کارت خارج شده ۳ باشد چقدر است؟

۵۰ قانون بیز را ثابت کنید:

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{P(A)}$$

راهنمایی: در دو طرف تساوی از تعریف احتمال شرطی استفاده کنید، تا درستی آن را ببینید.

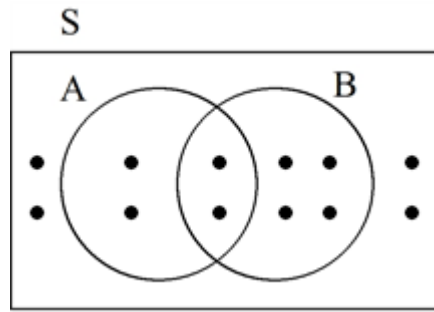
۵۱ احتمال مبتلا شدن به یک بیماری خاص برای کودکی که واکسن زده $\frac{2}{100}$ و برای کودکی که واکسن نزده $\frac{1}{10}$ است. اگر در شهری ۹۰ درصد کودکان، واکسن زده باشند، احتمال این‌که یک کودک از این شهر به این بیماری مبتلا شود چقدر است؟

۵۲ ۵۰ درصد واجدین شرایط در شهر A و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر B در انتخابات شورای شهر شرکت کرده‌اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر B باشد و فردی به تصادف از بین رأی‌دهنده‌های این دو شهر انتخاب شود، به چه احتمالی از شهر A خواهد بود؟

۵۳ قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد را ثابت کنید:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2))$$

۵۴ با توجه به شکل مقابل، آیا دو پیشامد A و B مستقل هستند؟



۵۵ عبارت مناسب را انتخاب کنید.

۵۶ دو پیشامد A و B را گوییم هرگاه وقوع هریک بر احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. (مستقل - ناسازگار - سازگار)

۵۷ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A) = \frac{1}{3}$ و $P(B) = \frac{2}{7}$ باشد، $P(A \cap B)$ را حساب کنید.

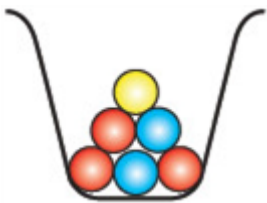
۵۸ احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده، $\frac{9}{10}$ است. اگر ۱۰ نفر را انتخاب کنیم، احتمال این که داروی ساخته شده، روی همه ی افراد جواب منفی داشته باشد، چه قدر است؟

در یک جعبه که شامل ۳ مهره ی قرمز، ۲ مهره ی آبی و ۱ مهره ی زرد است، دو مهره به تصادف و با جای گذاری بیرون می آوریم. مطلوب است احتمال آن که:

(الف) هر دو مهره قرمز باشند.

(ب) حداقل یک مهره آبی باشد.

(پ) هر دو مهره هم رنگ باشند.



۵۹ از مجموعه ی $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ یک عضو انتخاب می کنیم. فرض کنید A پیشامد یک عدد زوج و B پیشامد وقوع عددی بخش پذیر بر ۳ باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

۶۰ احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی یک بیماری $\frac{6}{10}$ و روی بیمار دیگری $\frac{8}{10}$ است. اگر این عمل روی این دو نفر انجام شود، احتمال های زیر را محاسبه کنید:

(الف) در هر دو بیمار موفقیت آمیز باشد؟

(ب) روی هیچ کدام موفقیت آمیز نباشد؟

(ج) روی بیمار دوم موفقیت آمیز باشد؟

۶۱ احتمال آن که علی در درس فیزیک قبول شود $\frac{5}{10}$ و احتمال آن که رضا در همین درس قبول شود $\frac{6}{10}$ است. احتمال های زیر را حساب کنید:

(الف) علی و رضا در درس فیزیک قبول شوند.

(ب) حداقل یکی در درس فیزیک قبول شوند.

(ج) فقط یکی از این دو نفر در درس فیزیک قبول شوند.

۶۲ سکه ای همگن را ۳ بار می اندازیم. اگر A پیشامد رخ دادن رو در دو پرتاب اول، B پیشامد رخ دادن پشت در پرتاب سوم، و C پیشامد رخ دادن دقیقاً دو پشت در سه پرتاب باشد، نشان دهید که A و B مستقل ولی B و C مستقل نیستند.

۶۳ برای داده‌های زیر موارد خواسته شده را محاسبه کنید.

۱۷, ۱۲, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۵, ۴, ۷, ۱۵, ۸, ۱۹

(ت) دامنه میان چارگی

(پ) Q_1

(ب) Q_3

(الف) دامنه تغییرات

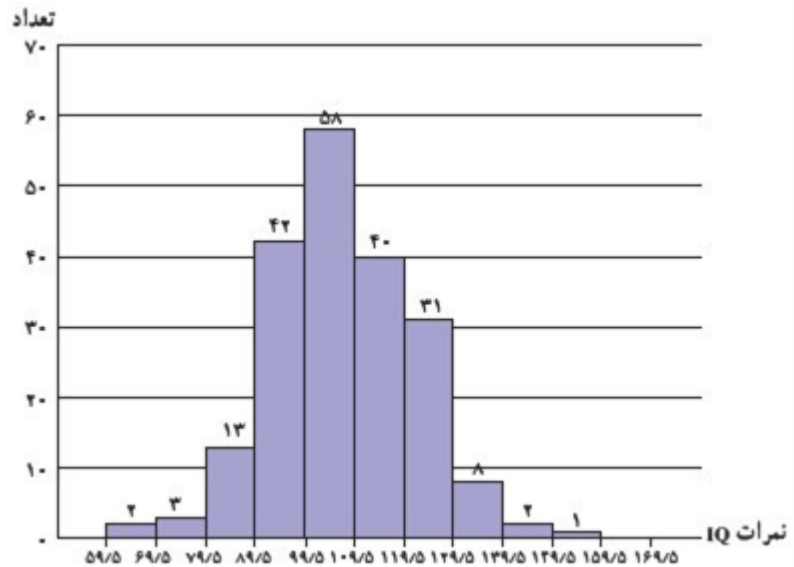
۶۴ نمودار بافت نگاشت نمرات IQ کودکان یک مهدکودک به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این نمودار به سؤالات زیر پاسخ دهید؟

(الف) تعداد کل کودکان که نمره IQ آنها، مورد بررسی قرار گرفته است، چند نفر است؟

(ب) نمره IQ در کدام رده بیش‌ترین و در کدام رده کم‌ترین فراوانی را دارد؟

(پ) چند درصد کودکان دارای نمره IQ بین ۱۴۰ تا ۱۶۰ هستند؟

(ت) جدول فراوانی آن را رسم کنید.



۶۵ اگر فراوانی نسبی مربوط به گروه خونی O، $\frac{۰}{۴}$ باشد و مجموع فراوانی‌های همه‌ی گروه‌های خونی برابر ۲۰ درنظر گرفته شود. فراوانی گروه خونی O چه عددی است؟

۶۶ رنگ چشم ۱۲۸ فرد به شرح زیر است: ۶۴ نفر قهوه‌ای، ۲۳ نفر آبی، ۳۶ نفر سبز و ۵ نفر سایر رنگ‌هاست. چه نمودارهایی می‌توان برای این اعداد رسم کرد. آن نمودار را رسم کنید.

نمودار میله‌ای ☐ نمودار دایره‌ای ☐ نمودار هردو ☐

۶۷ جملات زیر را کامل کنید:

(الف) برای متغیرهای پیوسته از نمودار استفاده می‌شود.

(ب) برای متغیرهای گسسته از نمودارهای و استفاده می‌شود.

(پ) برای متغیرهای کیفی از نمودارهای و استفاده می‌شود.

۶۸ رنگ چشم ۱۲۸ نفر به صورت زیر است. جدول فراوانی مربوطه را نوشته و نمودار دایره‌ای آن را رسم کنید.
۶۴ نفر قهوه‌ای - ۲۳ نفر آبی - ۳۶ نفر سبز - ۵ نفر سایر رنگ‌ها

۶۹ در داده‌های زیر:

۱۷, ۱۲, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۵, ۴, ۷, ۱۵, ۸, ۱۹

(الف) میانه را به دست آورید.

(ب) دامنه تغییرات را محاسبه کنید.

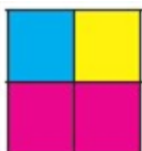
(ج) مد را مشخص کنید.

۷۰

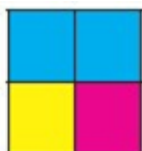
دو دانش‌آموز، جدول‌های چهارخانه‌ای را به صورت روبه‌رو رنگ‌آمیزی کرده‌اند، براساس جدول مربوط به طیف رنگ‌ها، جدول عددی این دو شکل به صورت روبه‌رو نشان داده شده است:

حال جدول عددی مربوط به این دو شکل را ابتدا با هم جمع و سپس هریک از اعضای جدول عددی را به عدد ۲ تقسیم می‌کنیم. جدول عددی حاصل را به دست آورده و شکل موردنظر را با توجه به جدول طیف رنگ‌ها به دست آورید. آیا این شکل میانگین دو شکل بالا است؟

برای پاسخ به این سؤال، کاربرد علم آمار در علوم شناختی و مغز را مطالعه کنید. عدد مربوط به طیف رنگ‌ها در جدول موجود در حاشیه نشان داده شده است.



$$\begin{pmatrix} 470 & 580 \\ 690 & 690 \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} 470 & 470 \\ 580 & 690 \end{pmatrix}$$

طیف رنگ‌ها	رنگ‌ها
۴۵۰ تا ۴۹۵	Blue
۴۹۵ تا ۵۷۰	Green
۵۷۰ تا ۵۹۰	Yellow
۵۹۰ تا ۶۲۰	Orange
۶۲۰ تا ۷۵۰	Magenta

۷۱

یک شرکت بیمه برای تعیین حق بیمه شخص ثالث در سال آینده، نمونه‌ای از خسارت‌های پرداخت شده امسال را جمع‌آوری نموده است. میانگین خسارت‌های پرداخت شده برابر ۸۵ میلیون ریال به دست آمده است در صورتی‌که میانه و مد آن برای این خسارت‌های پرداخت شده برابر $42/2$ میلیون ریال و عدد ۹۰ میلیون ریال می‌باشد. به نظر شما مدیر شرکت، کدام معیار گرایش به مرکز را به منظور تعیین حق بیمه در سال آینده در نظر بگیرید تا این‌که این شرکت ضرر نکند؟

۷۲

میانگین ۱۳ داده آماری ۷ و میانگین ۷ داده آماری ۵ است. میانگین این ۲۰ داده آماری را به دست آورید.

۷۳

یک کارخانه سازنده اتومبیل‌های شخصی در نظر دارد اتومبیل‌های جدیدی را طراحی کند. برای این منظور اتومبیل‌هایی را که از یک چهار راه عبور می‌کردند، مورد بررسی قرار داد.

۱۲ اتومبیل با ۱ سرنشین

۶ اتومبیل با ۲ سرنشین

۴ اتومبیل با ۳ سرنشین

۲ اتومبیل با ۴ سرنشین

۱ اتومبیل با ۶ سرنشین

به طور متوسط هر اتومبیل چند سرنشین دارد؟ در این بررسی مد چند است؟

۷۴

در بسیاری از دانشگاه‌ها، نمرات برحسب F, D, C, B, A اعلام می‌شوند. در این سیستم نمره گذاری A دارای ضریب ۴، B دارای ضریب ۳ و C دارای ضریب ۲ و D دارای ضریب ۱ و F ضریب ۱ یا ارزش ۱۰ دارد. صفر دارد.

جدول زیر دروس و تعداد واحدها و نمرات اکتساب شده توسط مریم را در دانشگاه نشان می‌دهد. معدل مریم را در این ترم حساب کنید.

نمره	تعداد واحد	درس
A	۳	ریاضیات
B	۳	فیزیک
C	۲	ورزش
B	۲	تاریخ
C	۳	ادبیات
A	۱	آزمایشگاه

۷۵

اگر در مجموعه اعداد $\{70, 110, 80, 60, x\}$ میانگین برابر میانه و مد باشد، x را پیدا کنید.

۷۶

برای داده‌های زیر، چارک اول و سوم به‌ترتیب برابر ۱۷ و ۴۵ است. اگر میانگین داده‌های بین چارک اول و چارک سوم برابر ۲۱ باشد، میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم را حساب کنید.

$$a, a, 17, 45, 1, 3a - 1, 4, 29, 19, 21, 47$$

۷۷

برای داده‌های زیر، چارک اول و سوم به‌ترتیب برابر ۹ و ۲۵ است. اگر میانگین داده‌های بین چارک اول و چارک سوم برابر $14/4$ باشد، میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم را حساب کنید.

$$a, a, 22, 9, 7, 3a + 1, 18, 15, 17, 25, 1$$

۷۸

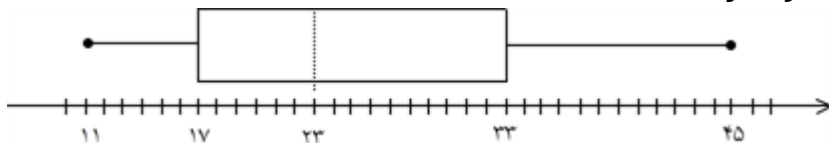
در نمودار جعبه‌ای زیر:

الف) چارک اول چقدر است؟

ب) Q_3 چقدر است؟

پ) میانه را به دست آورید.

ت) چرا دنباله سمت چپ از دنباله سمت راست کوتاه‌تر است؟



۷۹

برای داده‌های x_i ، میانگین برابر ۱۰ و واریانس برابر ۲ است. جدول زیر را کامل کنید.

ضریب تغییرات جدید	انحراف معیار جدید	واریانس جدید	میانگین جدید	داده‌های جدید
				$\frac{x_i}{2} + 2$

۸۰

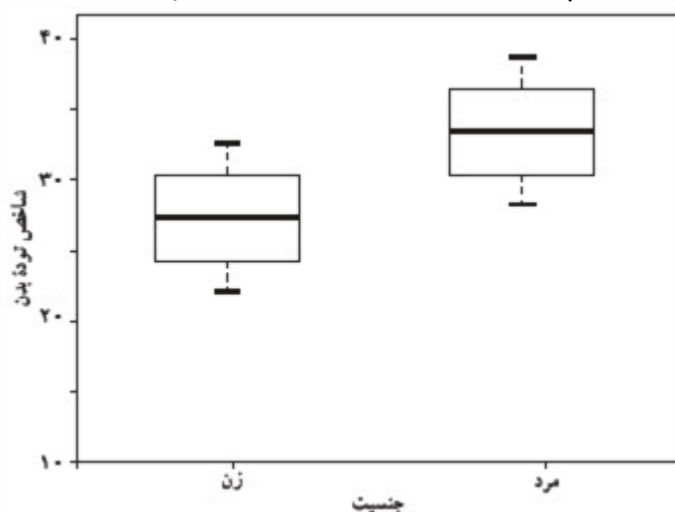
برای داده‌های x_i ، میانگین برابر ۱۲ و واریانس برابر ۳ است. جدول زیر را کامل کنید.

ضریب تغییرات جدید	انحراف معیار جدید	واریانس جدید	میانگین جدید	داده‌های جدید
				$3x_i + 2$

۸۱

نمودار جعبه‌ای مربوط به شاخص توده‌ی بدن (BMI) به تفکیک جنسیت رسم شده است. این نمودار را تفسیر کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) میانگین شاخص توده بدن در خانمها بیش‌تر است یا آقایان؟
ب) میزان پراکندگی شاخص توده بدن در خانمها بیش‌تر است یا آقایان؟



۸۲

فرض کنید ۲۲ بوته گل قرمز را انتخاب و تعداد گل‌های هر بوته را شمرده‌ایم و نتایج زیر به دست آمده است:
۷, ۴, ۳, ۸, ۶, ۴, ۱, ۷, ۴, ۲, ۱, ۱, ۱, ۳, ۲, ۲, ۲, ۲, ۵, ۵, ۱, ۲
نمودار جعبه‌ای را برای این داده‌ها رسم کنید.

۸۳

اگر ضریب تغییرات ۱۰ داده ۲ باشد و میانگین آن ۴، واریانس داده‌ها را به دست آورید.

۸۴

انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای هریک از اعداد جدول زیر به دست آورید.

اعداد	انحراف معیار	واریانس	ضریب تغییرات
۱۰۰, ۱۲, ۸, ۱۶, ۱۰, ۴, ۷			
۳, ۲, ۱, ۰, ۰, -۳, -۲, -۱			
۱۰/۱۱, ۱۱/۳۶, ۱۰/۱۱ ۹/۸۸, ۹/۴۲, ۹/۷۶, ۹/۶۲			
۲, ۳۰۰۰, ۲۵۰۰, ۲۰۰۰			

۸۵

نمودار زیر میزان مصرف گاز CNG را از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۳ نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات میزان مصرف گاز CNG از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۳ را به دست آورید.



۸۶

فرض کنید سنّ افرادی که در یک روز سوار اتوبوس شده‌اند، به صورت زیر است:

۳۲، ۵۹، ۲۶، ۵۳، ۷۴، ۱۷، ۴۵، ۲۳، ۶۴، ۵۰، ۶۱

انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات سنّ افراد را به دست آورید.

۸۷

برای داده‌های زیر:

۱۰۰، ۴۵، ۸۰، ۹۵، ۱۰۵، ۴۳، ۵۲، ۳۱، ۱۲، ۸۱، ۲۵۰، ۱۸، ۳۵، ۱۳۰، ۴۲، ۹۴، ۸۱، ۵۶

الف) دامنه تغییرات را به دست آورید.

ب) تقریباً ۲۵٪ داده‌ها قبل از کدام عدد هستند؟

پ) تقریباً ۵۰٪ داده‌ها بعد از کدام عدد هستند؟

ت) تقریباً ۷۵٪ داده‌ها قبل از کدام عدد هستند؟

۸۸

اگر واریانس داده‌های ۱۰ و $\frac{c}{3}$ و $2b$ و $5a - 5$ برابر صفر باشد. میانگین داده‌های a, b, c را به دست آورید.

۸۹

آماره‌هایی که می‌شناسید را نام ببرید. آن‌ها چه پارامترهایی را برآورد می‌کردند؟

۹۰

پارامتر واریانس و انحراف معیار جامعه را با چه آماره‌هایی می‌توان برآورد کرد؟

۹۱

چگونه از ارقام ۰ تا ۹ عدد تصادفی انتخاب می‌کنید؟ آیا با روش پیشنهادی شما می‌توان عدد تصادفی بین اعداد ۰ تا ۹۹ انتخاب کرد؟ آیا امکان توسعه‌ی روش پیشنهادی شما به انتخاب تصادفی از فهرستی ۱۰۰۰ تایی امکان‌پذیر است؟

۹۲

نوع روش نمونه‌گیری مناسب‌تر را انتخاب کنید.

الف) شرکت واردکننده‌ی خودروهای سنگین برای بررسی عملکرد سامانه ترمز آن‌ها می‌خواهد ده درصد از خودروهایی که به مرور زمان وارد کشور می‌شوند بازرسی کند.

ب) مدیر مدرسه‌ی ۶۰۰ نفری می‌خواهد نظر دانش‌آموزان را برای تغییر ساعت تعطیلی مدرسه براساس یک نمونه‌ی ۱۲ تایی بداند.

پ) در قسمت قبل اگر مدرسه، شش پایه داشته باشد و ما حدس بزنیم که نظر ۶ پایه با هم تفاوت دارد (با فرض برابر بودن تعداد دانش‌آموزان در پایه‌های مختلف).

۹۳

دلایل اریبی در نمونه‌گیری‌های زیر را ذکر کنید. کدام روش گردآوری داده‌ها برای آن‌ها مناسب‌تر است؟

الف) نمونه‌گیری راحت: افراد در دسترس را به عنوان نمونه انتخاب می‌کنیم.

ب) نمونه‌ی غیرتصادفی: عامل شانس در انتخاب نمونه نقشی ندارد.

پ) نمونه‌گیری ایمیلی (رایانه‌ای): پرسش‌نامه‌ای به ایمیل‌های انتخاب شده ارسال می‌شود.

ت) نمونه‌گیری تلفنی: از دفترچه‌ی راهنمای تلفن تعدادی شماره به تصادف انتخاب می‌شود.

ث) برخی از اعضای انتخاب شده در نمونه حاضر به پاسخگویی نمی‌باشند.

۹۴

در یک مطالعه از ۱۲۶۱ مشتری غذاهای گیاهی، سؤال شده است که برای کدام وعده غذایی (ناهار یا شام) سفارش داده‌اند؟

الف) متغیر را مشخص کنید. این متغیر کمی است یا کیفی؟

ب) کدام روش گردآوری داده‌ها برای مطالعه مناسب است؟

پ) جامعه‌ی آماری در این‌جا چیست؟ در این مطالعه پارامتر و آماره چه چیزی می‌توانند باشند؟

۹۵

شاخص پوسیدگی دندان (DMFT) در ایران برای سال ۱۳۶۰ برابر ۳ بوده است؛ یعنی به طور متوسط هر ایرانی دارای

یک دندان کشیده شده، یک دندان پوسیده و یک دندان پر شده است. براساس نمونه‌ای به اندازه‌ی ۴۰۰، این شاخص

در سال ۱۳۹۵ برابر ۶ شده است ($\bar{x} = 2$). اگر انحراف معیار دندان‌های کشیده شده، پوسیده و پر شده به‌ترتیب برابر ۱

، ۲، ۱/۶ باشد، بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین دندان‌های کشیده شده، پوسیده و پر شده محاسبه کنید.

اگر در سؤال قبل ۱۰۰ بار نمونه‌گیری را تکرار کنیم؛ یعنی ۱۰۰ دفعه نمونه‌ای به اندازه‌ی ۲۴ بگیریم و چندبرفراوانی بافت نگاشت ۱۰۰ میانگین را رسم کنیم می‌توان نشان داد که تقریباً به صورت یک منحنی به شکل زیر است (توجه کنید منظور از ۱۰۰ عددی بزرگ است، ۱۰۰ یک مثال است). در این شکل μ نشان‌دهنده‌ی میانگین جامعه است، که در این‌جا میانگین نمرات همه‌ی دانش‌آموزان است، که مجهول است. حال فرض کنید برای ۱۰۰ نمونه‌ی ۲۴ تایی، ۱۰۰ بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی محاسبه کرده‌ایم. در زیر نمودار نرمال ۲۰ تا از آن‌ها رسم شده است. نقاط قرمز رنگ نشان‌دهنده‌ی میانگین نمونه و پاره‌خط‌های افقی آبی معرف فاصله‌ی اطمینان مربوط اند. خط سیاه عمودی میانگین جامعه را مشخص کرده است.

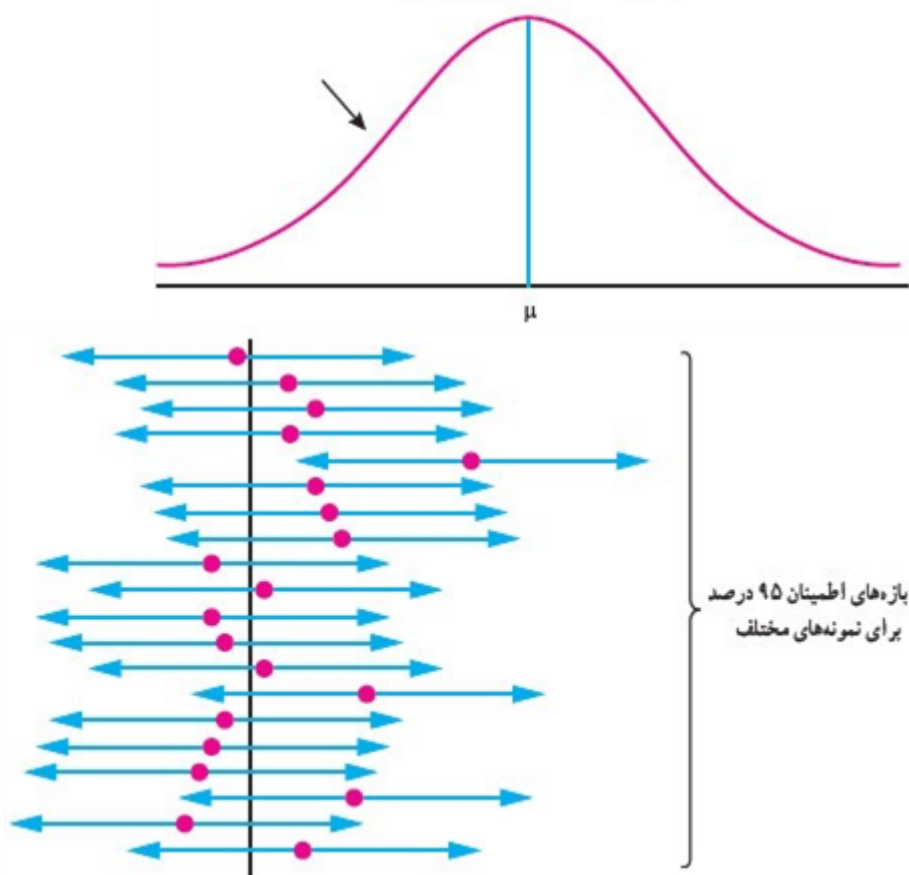
(الف) اگر پاره‌خط آبی، خط سیاه را قطع نکند، چه نتیجه‌ای باید گرفت؟

(ب) چند درصد از ۲۰ پاره‌خط آبی، خط سیاه را قطع کرده‌اند؟

(پ) اگر ۱۰۰ پاره‌خط آبی را رسم می‌کردیم، انتظار داشتید چند تا از آن‌ها خط سیاه را قطع نکنند؟

(ت) نتیجه این تمرین تعبیریک بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصد است. اگر ۱۰۰ بار نمونه‌گیری را تکرار کنیم و ۱۰۰ بازه‌ی اطمینان محاسبه کنیم انتظار داریم از آن‌ها پارامتر میانگین جامعه را دربرگیرند.

چند بر بافت نگاشت فراوانی میانگین‌ها



داده‌های زیر نمرات ۲۴ دانش‌آموز از ۱۰۰ است.

۷۵ ۷۴ ۷۳ ۷۱ ۷۱ ۷۰ ۶۷ ۷۵

۷۹ ۷۸ ۷۸ ۷۸ ۷۸ ۷۷ ۷۵ ۸۰

۸۷ ۸۶ ۸۶ ۸۳ ۸۲ ۸۲ ۸۱ ۹۱

الف) میانگین و انحراف معیار نمرات را محاسبه کنید.

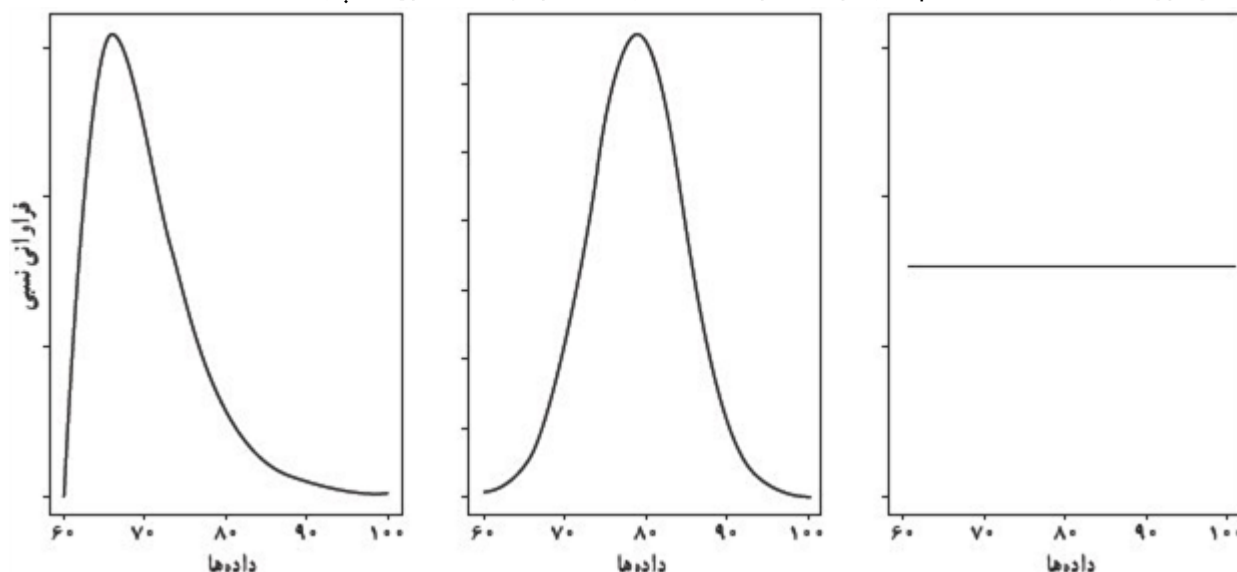
ب) اگر انحراف معیار جامعه ۶ باشد بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین نمرات جامعه محاسبه کنید.

پ) چند درصد داده‌ها داخل این بازه قرار می‌گیرند؟

ت) بافت نگاشت فراوانی داده‌ها را رسم کنید. (در فواصل $[۶۷, ۷۱]$ و $[۷۱, ۷۵]$ و ...)

ث) چندبر فراوانی بافت نگاشت را رسم کنید (وسط مستطیل‌ها را با پاره‌خط به هم متصل کرده و به محور طول‌ها وصل کنید).

ج) اگر داده‌ها زیاد شوند، به نظر شما شکل چندبر فراوانی بافت نگاشت به کدام یک از نمودارهای صفحه‌ی بعد شباهت بیش‌تری خواهد داشت؟ (نام نمودارها به‌ترتیب: یک‌نواخت، نرمال، نامتقارن یا چوله است)



طول فاصله‌ی اطمینان، برابر تفاضل حدّ بالا و پایین بازه‌ی اطمینان است.

الف) اگر در فرمول بازه اطمینان اندازه‌ی نمونه افزایش یابد، طول فاصله‌ی اطمینان می‌یابد. چرا؟

ب) اگر در فرمول بازه اطمینان انحراف معیار جامعه افزایش یابد، طول فاصله اطمینان می‌یابد. چرا؟

رئیس یک دانشگاه علاقه‌مند است متوسط سنّ دانشجویانی که در سال جاری ثبت‌نام کرده‌اند را بداند. برای این منظور، او یک نمونه‌ی تصادفی از سنّ ۲۵ دانشجو را انتخاب می‌کند. میانگین سنّ آن‌ها برابر ۲۲ سال برآورد شده است. اگر در بررسی‌های گذشته انحراف معیار طول قد دانشجویان این دانشگاه برابر $۹/۱$ سال باشد، بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین سنّ جامعه را محاسبه کنید.

فرض کنید جامعه‌ای از $N = ۱۰۰$ عضو تشکیل شده و می‌خواهیم نمونه‌ای به اندازه‌ی $n = ۲۰$ از آن انتخاب کنیم. در هریک از حالت‌های زیر احتمال انتخاب هر عضو جامعه به عنوان نمونه چه‌قدر است؟ نام هر روش نمونه‌گیری را بگویید.

الف) اگر جامعه به دو قسمت ۵۰ تایی تقسیم شود و بخواهیم از هر قسمت نمونه‌ی تصادفی ۱۰ تایی انتخاب کنیم.

ب) اگر جامعه به تصادف به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم شود و دو قسمت را به عنوان نمونه انتخاب کنیم.

پ) اگر جامعه به تصادف به ۲۰ قسمت مساوی تقسیم شود، و از قسمت اول یک عضو به تصادف انتخاب شود. فرض کنید عضو انتخابی دومین عضو باشد و از قسمت‌های بعدی نیز دومین عضو انتخاب شود.

پاسخ نامه تشریحی

$$(\sim p \vee \sim q) \Leftrightarrow \sim(p \vee q)$$

$$(F \vee T) \Leftrightarrow \sim(T \vee F)$$

$$T \Leftrightarrow F \equiv F$$

۱

می‌توان با جدول ارزش گزاره‌ها نیز به جواب رسید.

الف) گزاره‌ای با ارزش درست است.

ب) گزاره نیست.

ج) گزاره است و نادرست (زیرا اگر n زوج باشد، مثبت می‌شود).

د) گزاره نیست.

ه) گزاره نیست.

الف) $\forall x \in \mathbb{N}; (x = 2k) \vee (x = 2k - 1)$ - درست

ب) $\exists a \in \mathbb{W}; a^2 < 0$ - نادرست

پ) $\forall d \in \mathbb{P}; d - 2k - 1$ - نادرست

ت) $\forall x \in \mathbb{Z}; x \geq 0 \Rightarrow 1 - 2x > 5$ - نادرست

ث) $\forall x \in \mathbb{R}; x \neq 0 / 1 \left(x + \frac{1}{x} \geq 2 \right)$ - درست

ج) $\exists x \in \mathbb{R}; x^2 = x$ - درست

$$p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$$

از عکس نقیض کمک می‌گیریم:

$$n \text{ مضرب } 3 : \begin{cases} n = 3q + 1 \Rightarrow n^2 = 9q^2 + 6q + 1 = 3 \text{ مضرب نیست} \\ n = 3q + 2 \Rightarrow n^2 = 9q^2 + 12q + 4 = 3 \text{ مضرب نیست} \end{cases} \Rightarrow \text{پس گزاره درست است.}$$

p	q	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	ن	ن
د	ن	د	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن

الف) $p \wedge \sim q$ ٥

p	$\sim p$	$\sim p \wedge p$
د	ن	ن
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	د	ن

ب) $\sim p \wedge p$

p	$\sim p$	$\sim p \vee p$
د	ن	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	د	د

پ) $\sim p \vee p$

p	q	$p \vee q$	$\sim p$	$(p \vee q) \wedge \sim p$
د	ن	د	ن	ن
د	د	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	د

ت) $(p \vee q) \wedge \sim p$

$p \vee q$	q	$(p \vee q) \Leftrightarrow q$
د	ن	ن
د	د	د
ن	ن	د
د	د	د

ث) $(p \vee q) \Leftrightarrow q$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \Leftrightarrow \sim q$
د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	د	د
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

ج) $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

۶ الف) $۴ > ۳$

ب) ابوالوفای بوزجانی ریاضی‌دان نیست.

پ) $a \notin \{b, c, d\}$

ت) ۲ عدد زوج نیست و عدد π گویا نیست.

ث) زمین به دور خورشید می‌چرخد یا سنندج مرکز استان کردستان نیست.

ج) اگر n فرد باشد. آن‌گاه $a + 1$ زوج است.

۷

الف) گزاره هست - نادرست

پ) گزاره هست - درست

ث) گزاره هست - درست

چ) گزاره هست - غلط

خ) گزاره هست - غلط

ب) گزاره هست - درست

ت) گزاره نیست

ج) گزاره نیست

ح) گزاره هست - غلط

د) گزاره هست - غلط

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + ab + b^2) \Rightarrow 5^3 + 8 = (5^3)^3 + 2^3 = (5^3 + 2)(\dots) = 127q$$

ر) گزاره هست - درست

ذ) گزاره نیست

۸

الف) ارزش

ب) $\{\{1\}\} \subset A$

پ) آمار

ت) ناسازگار

۹

$$2^{n+2} = 2^n + 48$$

$$2^n \times 2^2 = 2^n + 48$$

$$4 \times 2^n - 2^n = 48$$

$$3 \times 2^n = 48$$

$$2^n = \frac{48}{3} = 16$$

$$n = 4$$

$$A = \{a\} \quad B = \{a, \{a\}\}$$

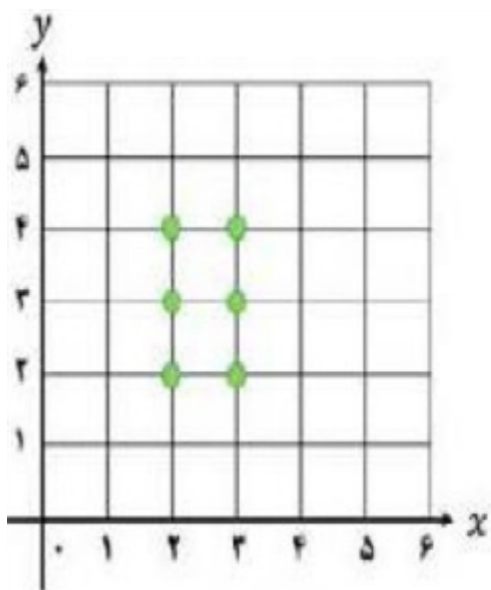
۱۰

واضح است $A = \{a\} \in B$ و چون $a \in B$ پس $A = \{a\} \subseteq B$.

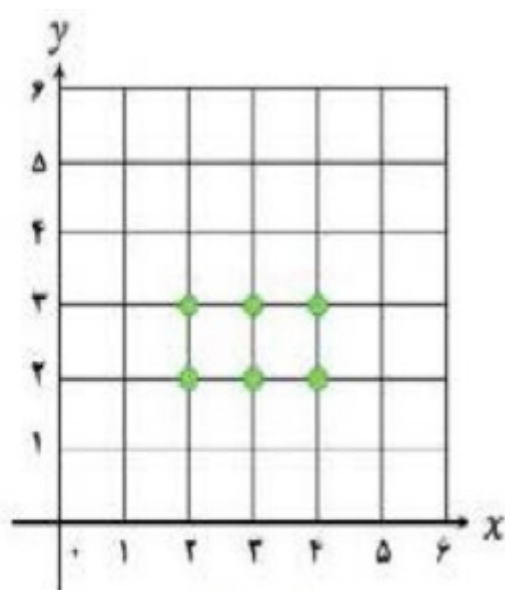
الف) $A = \{2, 3\}$, $B = \{2, 3, 4\}$

$A \times B = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$

$B \times A = \{(2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3), (4, 2), (4, 3)\}$

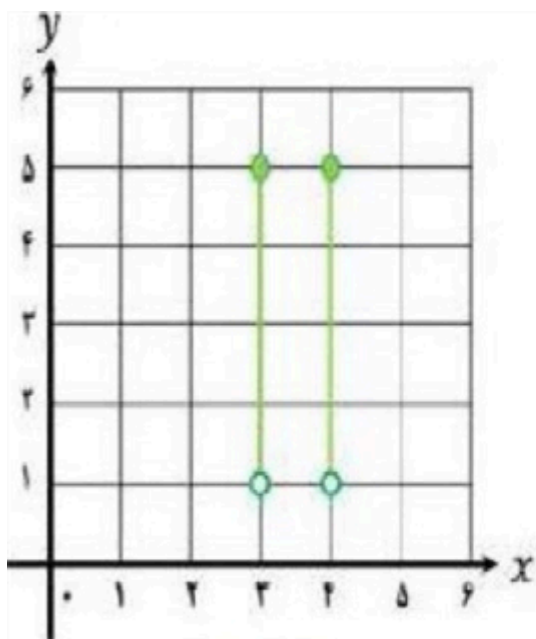


$A \times B$

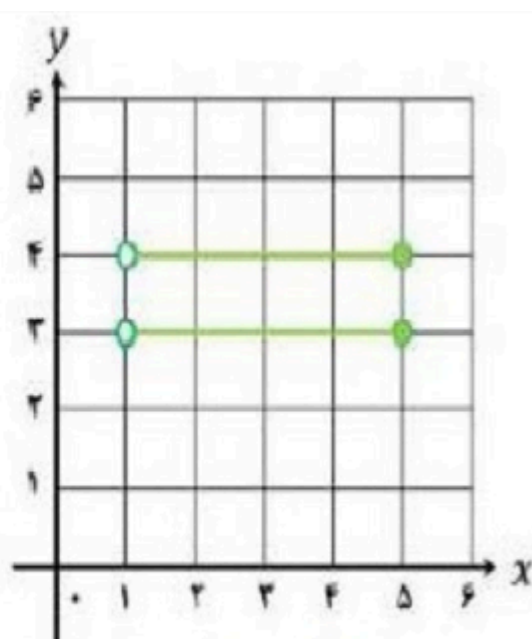


$B \times A$

ب) $A = \{3, 4\}$, $B = (1, 5]$

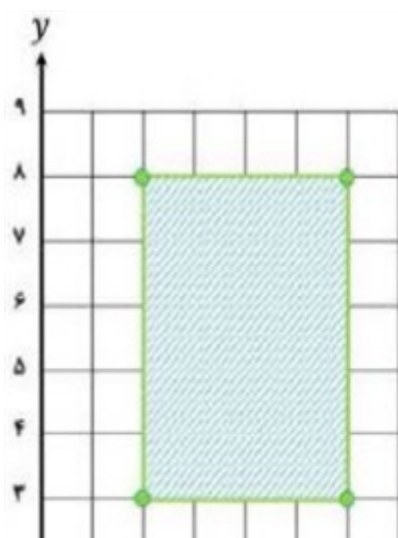


$A \times B$

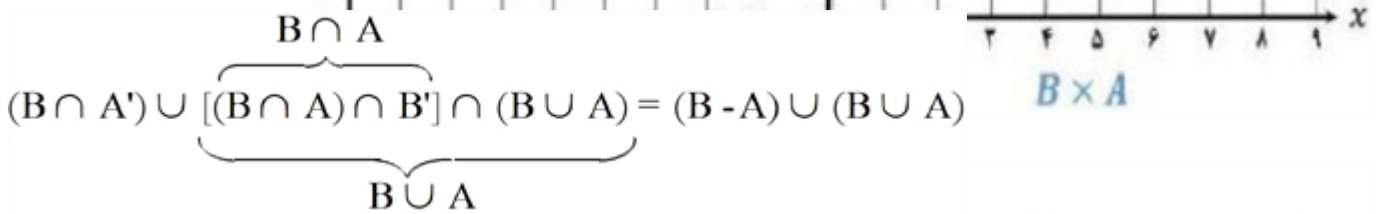


$B \times A$

ج) $A = [2, 6]$, $B = [3, 8]$

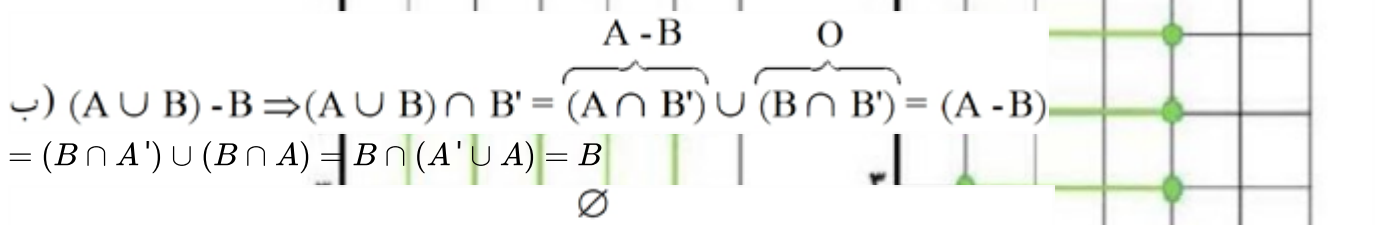


الف) $(A' \cap B) \cup ((B \cap A) - B') \cap (B \cup A) \Rightarrow$

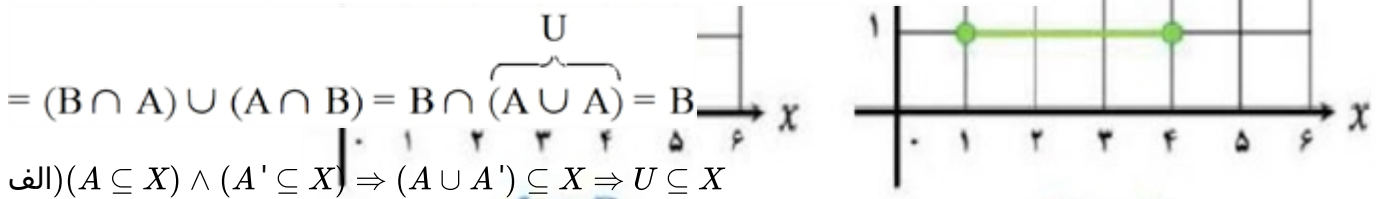


۱۲

$\frac{(B-A) \subseteq (B \cup A)}{\Rightarrow} (B \cup A)$



ب) $(A \cup B) - B \Rightarrow (A \cup B) \cap B' = (A \cap B') \cup (B \cap B') = (A - B)$



الف) $(A \subseteq X) \wedge (A' \subseteq X) \Rightarrow (A \cup A') \subseteq X \Rightarrow U \subseteq X$

۱۳

از طرفی می‌دانیم همواره $X \subseteq U$ ، بنابراین $X = U$ است.

ب) $(A \cap B') \cup (A \cap B) = A \cap (B' \cup B) = A$

پ) $(A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C) = (A \cap C') \cap (B \cap C') = (A \cap B) \cap (C' \cap C')$

$= (A \cap B) \cap C' = (A \cap B) - C = (A - C) \cap (B - C)$

ت) $(A \cup B) - (A \cap B) = (A \cup B) \cap (A \cap B)' = (A \cup B) \cap (A' \cap B')$

$= [(A \cup B) \cap A'] \cup [(A \cup B) \cap B']$

$= [(A \cap A') \cup (B \cap A')] \cup [(A \cap B') \cup (B \cap B')]$

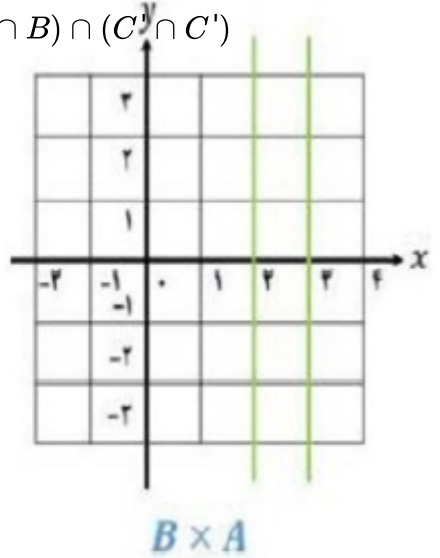
$= (B - A) \cup (B - A) = (A \cup B) - (A \cap B)$

ث) $(A \cup B) \cap (A \cap B)' = \emptyset$

ج) $B = B \cap (A \cup B) \xrightarrow{A \cup B = A \cup C} B \cap (A \cup C)$

$= (B \cap A) \cup (B \cap C) \xrightarrow{A \cap B = A \cap C} (A \cap C) \cup (B \cap C) = C \cap (A \cup B)$

$\xrightarrow{A \cup B = A \cup C} C \cap (A \cup C) = C$



U

$$\text{الف)} (A \cap B) \cup (A \cap B') \Rightarrow (A \cap \overbrace{(B \cup B')}^U) = A$$

۱۴

$$\text{ب)} (A' \cap A) \cap (B' \cap A) = \emptyset$$

$$\text{پ)} A \cap (B \cap C) = (A \cap A) \cap (B \cap C) = A \cap (A \cap (B \cap C))$$

$$= A \cap ((A \cap B) \cap C) = A \cap (C \cap (A \cap B)) = (A \cap C) \cap (A \cap B)$$

$$= (A \cap B) \cap (A \cap C)$$

$$\text{ت)} A \cup (B \cup C) = (A \cup A) \cup (B \cup C) = A \cup (A \cup (B \cup C)) = A \cup ((A \cup B) \cup C)$$

$$= A \cup (C \cup (A \cup B)) = (A \cup C) \cup (A \cup B) = (A \cup B) \cup (A \cup C)$$

$$\text{الف)} A \cap B = B \cap A \Rightarrow A \cap B = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B\}$$

۱۵

$$= \{x \in U \mid x \in B \wedge x \in A\} = B \cap A$$

$$\text{ب)} A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \Rightarrow A \cap (B \cap C) = \{x \in U \mid x \in A \wedge x \in B \cap C\}$$

$$= \{x \in U \mid x \in A \wedge \{x \in B \wedge x \in C\}\} = \{x \in U \mid (x \in A \wedge x \in B) \wedge x \in C\}$$

$$= (A \cap B) \cap C$$

$$\text{پ)} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \Rightarrow A \cap (B \cup C) = \{x \in A \mid x \in B \cup C\}$$

$$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B \cup C \Rightarrow x \in A \wedge (x \in B \cup C) \Rightarrow \{x \in A \wedge x \in B\} \vee \{x \in A \wedge x \in C\}$$

$$\Rightarrow x \in A \cap B \vee x \in A \cap C \Rightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$\Rightarrow A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

به طور مشابه ثابت می شود $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$ بنابراین دو مجموعه با هم برابرند.

$$\text{الف)} \forall x; x \in (B - A) \Rightarrow x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in B \Rightarrow B - A \subseteq B \quad (۱)$$

۱۶

$$\forall x; x \in B \xrightarrow{A \cap B = \emptyset} x \in B \wedge x \notin A \Rightarrow x \in B - A \Rightarrow B \subseteq B - A \quad (۲)$$

$$B - A = B \quad \text{از ۱ و ۲ داریم:}$$

$$\text{ب)} A \cap B = \emptyset \Rightarrow x \in B \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in A' \Rightarrow B \subseteq A'$$

$$۲^x - ۳۸۴ = ۲^{x-۲} \Rightarrow ۲^x - ۳۸۴ = ۲^x \div ۲^۲ \Rightarrow ۲^x - ۳۸۴ = ۲^x \div ۴$$

۱۷

$$۲^x - \frac{۲^x}{۴} = ۳۸۴ \Rightarrow ۲^x \left(1 - \frac{1}{۴} \right) = ۳۸۴ \Rightarrow ۲^x = ۳۸۴ \times \frac{۴}{۳} = ۵۱۲ = ۲^۹ \Rightarrow x = ۹$$

$$A = \{m \in \mathbb{Z} \mid |m| < ۳\} = \{-۱, ۰, ۱\} \quad -۳ < m < ۳$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^۳ = x\} = \{-۱, +۱, ۰\}$$

$$C = \{y \in \mathbb{Z} \mid y^۳ \leq ۳y\} = \{۰, ۱, ۳\}$$

$$D = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^۳ \leq ۱\} = \{-۱, ۰, ۱\}$$

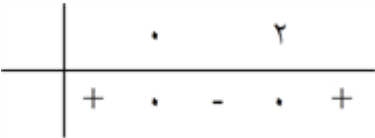
$$E = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^۳ + ۳m = ۳m^۳\} = \{۰, ۱, ۳\}$$

$$m^۳ - ۳m^۳ + ۳m = ۰ \Rightarrow m(m^۳ - ۳m + ۳) = ۰ \Rightarrow m = ۰ \Rightarrow (m - ۳)(m - ۱) = ۰$$

$$\Rightarrow m = ۳, m = ۱$$

$$x^۳ - x = ۰ \Rightarrow x(x^۲ - ۱) = ۰ \Rightarrow x = ۰, x = \pm ۱ \quad -۱ \leq x \leq ۱$$

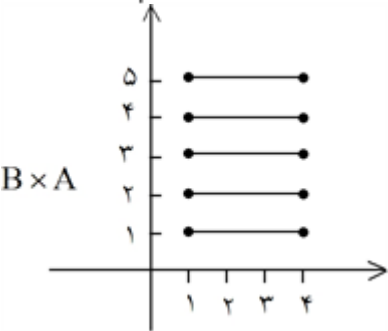
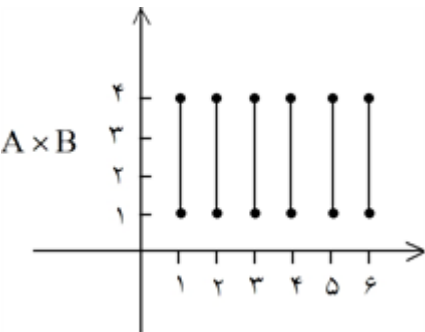
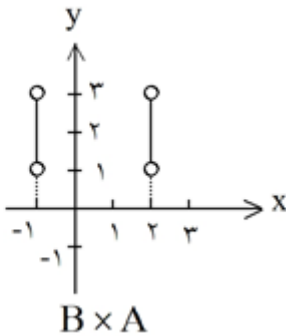
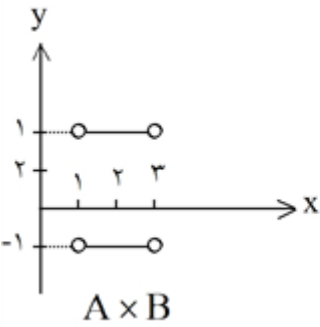
$$y^۳ - ۳y \leq ۰ \Rightarrow y(y - ۳) \leq ۰$$

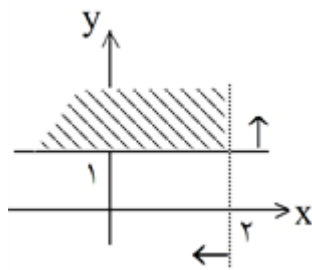


$$A = B = D, C = E$$

$$A = \{x \mid -۳ < ۳x - ۵ < ۳\} = \{x \mid ۳ < ۳x < ۸\} = \{x \mid ۱ < x < ۳\} = (۱, ۳)$$

$$B = \{y \mid y^۳ - y - ۳ = ۰\} = \{y \mid (y - ۳)(y + ۱) = ۰\} = \{-۱, ۳\}$$





$$A \times B = \{(x, y) \mid x < 2, y \geq 1\} \quad 21$$

$$\text{طرف اول} = A - (B \cup C) =$$

$$A \cap (B \cup C)' =$$

$$A \cap (B' \cap C') =$$

$$(A \cap B') \cap C' =$$

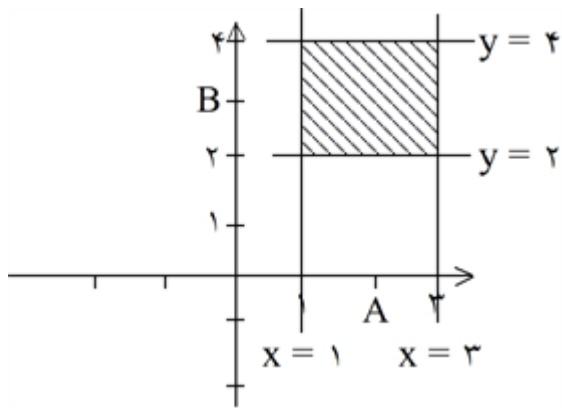
$$(A - B) \cap C' =$$

$$(A - B) - C = \text{طرف دوم}$$

$$A = [1, 3] \quad B = (2, 4)$$

$$A \times B = \{(x, y) \in R^2 \mid 1 \leq x \leq 3, 2 < y < 4\}$$

پس در نتیجه نمودار آن به شکل زیر می‌باشد.



$$\text{الف) } (A - B) \cap C = (A \cap C) - B \Rightarrow (A - B) \cap C = (A \cap B') \cap C =$$

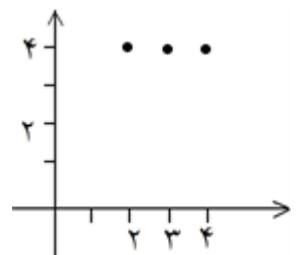
$$(A \cap C) \cap B' = (A \cap C) - B$$

$$\text{ب) } (B - A) \cup (A \cap B) = B \Rightarrow (B - A) \cup (A \cap B) = (B \cap A') \cup (A \cap B) =$$

$$B \cap \underbrace{(A' \cup A)}_{U} = B \cap (U) = B$$

$$A = \{2, 3, 4\} \quad B = \{4\}$$

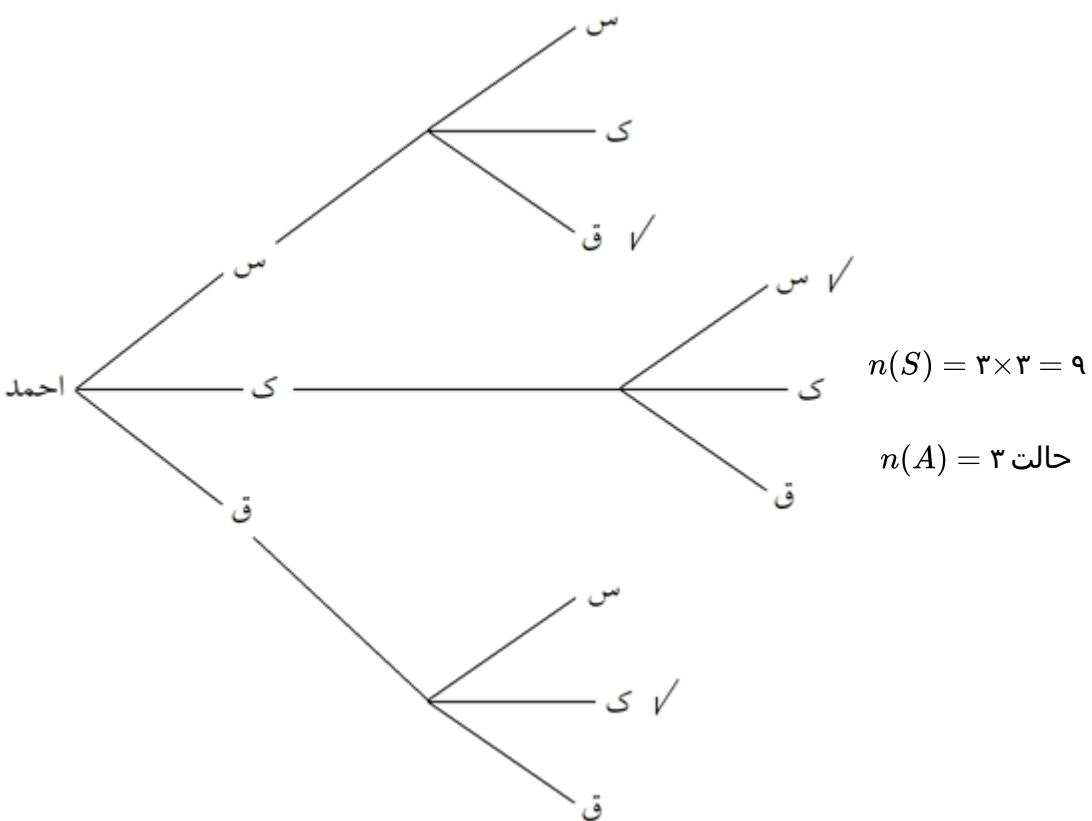
$$A \times B = \{(2, 4), (3, 4), (4, 4)\}$$



۲۶

به ترتیب قد $S = \{1, 2, 3, \dots, 14\}$

بلندقدترین $A = \{14\} \rightarrow p(A) = \frac{1}{14}$



۲۷

الف) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
 $= \frac{2}{5} + \left(1 - \frac{3}{5}\right) - \frac{1}{5} = \frac{2}{5} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$

ب) $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} - \frac{1}{5} = \frac{1}{5}$

$P(C') = 1 - . / 4 = . / 6$

۲۸

۲۹

مثال ۵ صفحه ۸۵ ۳۰

$n(S) = 50 \text{ (} . / 25 \text{)}, n(A) = \left[\frac{50}{5} \right] = 10 \text{ (} . / 5 \text{)} \Rightarrow P(A) = \frac{10}{50} \text{ (} . / 25 \text{)}$

تمرین ۴ صفحه ۹۱

۳۱

$n(S) = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \text{ (} . / 5 \text{)}, n(A) = 4 \times 3 \times 2 \times 2 \text{ (} . / 5 \text{)} \Rightarrow P(A) = \frac{48}{120} \text{ (} . / 25 \text{)}$

$$\begin{array}{r}
 p(x) = k \\
 p(y) = k + \frac{1}{4} \\
 + \quad p(z) = k + \frac{2}{4} \\
 \hline
 \underbrace{p(x) + p(y) + p(z)}_1 = 3k + \frac{3}{4}
 \end{array}$$

۳۲

$$\Rightarrow 3k = \frac{1}{4} \Rightarrow k = \frac{1}{12} \Rightarrow \begin{cases} p(x) = \frac{1}{12} \\ p(y) = \frac{2}{12} \\ p(z) = \frac{3}{12} \end{cases}$$

$$\text{می‌دانیم: } p(a) + p(b) + p(c) + p(d) + p(e) = 1 \Rightarrow \frac{2}{5} + \frac{11}{25} + p(e) = 1 \Rightarrow p(e) = 1 - \frac{21}{25} = \frac{4}{25} = \frac{2}{5}$$

۳۳

$$p(A) = p(\{a, b\}) = p(a) + p(b) = \frac{2}{5}$$

$$p(B) = p(\{a, b, c, d\}) = p(a) + p(b) + p(c) + p(d) = \frac{2}{5} \Rightarrow p(c) + p(d) = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = \frac{11}{25}$$

$$p(C') = p(\{a, b, e\}') = p(\{d, c\}) = p(c) + p(d) = \frac{11}{25}$$

$$P(C) - P(A) = P(\{a, b, c\}) - P(\{a, b\}) = P(e) = \frac{2}{5} - \frac{2}{5} = \frac{6}{25} \quad (1)$$

۳۴

$$P(S) = P(\{a, b, c, d, e\}) = P(\{a, b, c, d\}) + P(e) = P(B) + P(e) = 1$$

$$\stackrel{(1)}{\rightarrow} P(B) = 1 - P(e) = 1 - \frac{6}{25} = \frac{19}{25}$$

$$P(\text{رو}) = \frac{1}{2} P(\text{پشت})$$

۳۵

$$P(\text{رو}) + P(\text{پشت}) = 1 \Rightarrow \frac{1}{2} P(\text{پشت}) + P(\text{پشت}) = 1 \Rightarrow \frac{3}{2} P(\text{پشت}) = 1 \Rightarrow P(\text{پشت}) = \frac{2}{3}$$

$$P(\text{رو}) = \frac{1}{3}$$

$$S = \{A, B, C\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} P(A) + P(B) + P(C) = 1 \\ P(A) = P(B) = 2P(C) \end{array} \right\} \Rightarrow 2P(C) + 2P(C) + P(C) = 1$$

۳۶

$$\Rightarrow P(C) = \frac{1}{5} \Rightarrow P(A) = P(B) = \frac{2}{5}$$

$$P(\{B, C\}) = P(B) + P(C) = \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{3}{5}$$

$$p(1) + p(2) + p(3) = 1 \xrightarrow{(\cdot/25)} a^2 + \frac{a}{2}d + a = 1$$

۳۷

$$2a^2 + 2a - 2 = \cdot \begin{cases} a = \frac{1}{2} \Rightarrow p(2) = \frac{1}{2} \\ a = -2 \end{cases} \quad \text{غیر قابل قبول (طبق اصل احتمال)}$$

$$\begin{aligned} P(a) = P(c), P(b) = 2P(a) &\Rightarrow P(a) = \frac{1}{4}(\cdot/25), P(b) = \frac{1}{2}(\cdot/25) \\ P(a) + P(b) + P(c) = 1(\cdot/25) \\ P(a \cup b) = \underbrace{P(a) + P(b)}_{(\cdot/25)} = \frac{3}{4}(\cdot/25) \end{aligned}$$

۳۸

مثال صفحه ۹۸

$$\begin{aligned} P(2) = P(3) = P(5) = 2x &\Rightarrow 2x + 2x + 2x + x + n = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{12} \\ P(1) = P(4) = P(6) = x \\ A = \{1, 2, 3\} \Rightarrow P(A) = x + 2x + 2x = 5x = \frac{5}{12} \end{aligned}$$

۳۹

$$\begin{aligned} p(a) + p(b) + p(c) + p(d) = 1 & \quad p(b) + p(b) + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = 1 \Rightarrow p(b) = \frac{3}{8} \\ p(a) = \frac{9}{32} \Rightarrow p(a') = 1 - \frac{9}{32} \Rightarrow p(a') = 1 - \frac{9}{32} = \frac{23}{32} \end{aligned}$$

۴۰

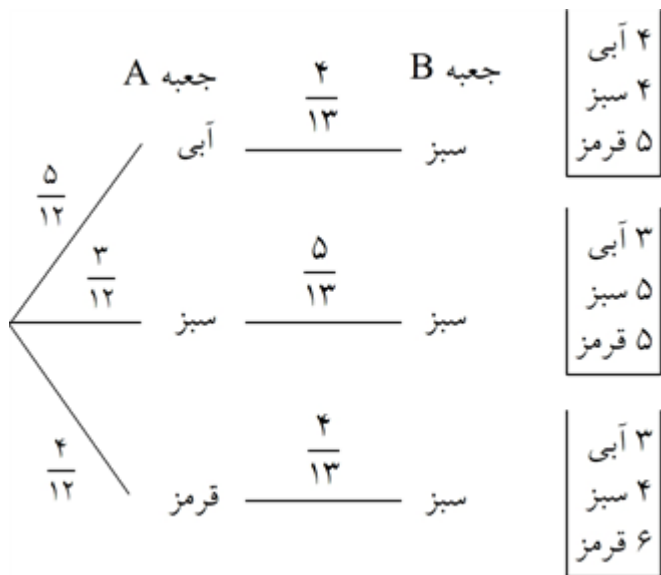
$$\begin{aligned} p(a) + p(b) + p(c) = 1 \\ p(a) = \frac{1}{2}p(b) \\ p(b) = \frac{1}{3}p(c) \end{aligned}$$

۴۱

$$p(c) = x \quad \frac{1}{6}x + \frac{1}{3}x + x = 1 \Rightarrow x = \frac{6}{9}$$

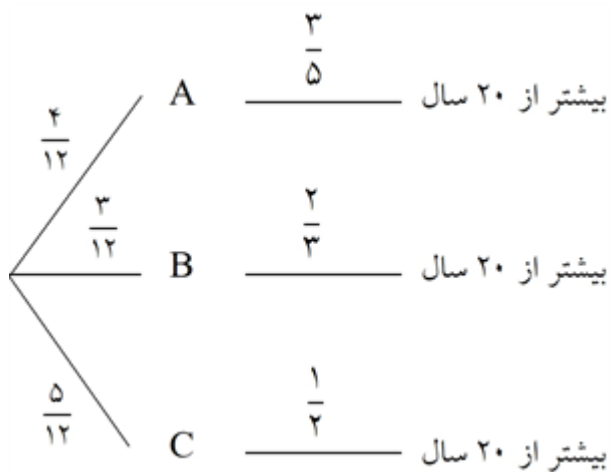
$$\text{الف) } p(a) = \frac{1}{9}, p(b) = \frac{2}{9}, p(c) = \frac{6}{9}$$

$$\begin{aligned} p\{b, c\} = p(b) + p(c) &= \frac{2}{9} + \frac{6}{9} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$



۴۲

$$P = \frac{5}{12} \times \frac{4}{13} + \frac{3}{12} \times \frac{5}{13} + \frac{4}{12} \times \frac{4}{13} = \frac{20}{156} + \frac{15}{156} + \frac{16}{156} = \frac{51}{156}$$



۴۳

$$P = \frac{4}{12} \times \frac{3}{5} + \frac{3}{12} \times \frac{2}{3} + \frac{5}{12} \times \frac{1}{2} = \frac{24 + 20 + 25}{120} = \frac{69}{120} = \frac{23}{40}$$

$$p(\text{اول قرمز} \cap \text{اول آبی}) = p(\text{اول آبی}) \times p(\text{دوم قرمز} | \text{اول آبی}) = \frac{4}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{4}{15}$$

۴۴

۴۵ عضو تیم فوتبال F و معدل بالای ۱۹، M

$$p(F) = 0.3$$

$$p(M | F) = 0.4$$

$$p(F \cap M) = p(F) \times p(M | F) = 0.3 \times 0.4 = 0.12$$

$$P(A|B) = \frac{n(A \cap B)}{n(B)} = \frac{4}{7}$$

۴۶

$$P(B|A) = \frac{n(B \cap A)}{n(A)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$P(B) = x \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) \Rightarrow \cdot / ۸ = \cdot / ۶ + x - \cdot / ۶ x$$

$$\Rightarrow \cdot / ۲ x = \cdot / ۲ \Rightarrow x = \cdot / ۵ \Rightarrow P(B) = \cdot / ۵$$

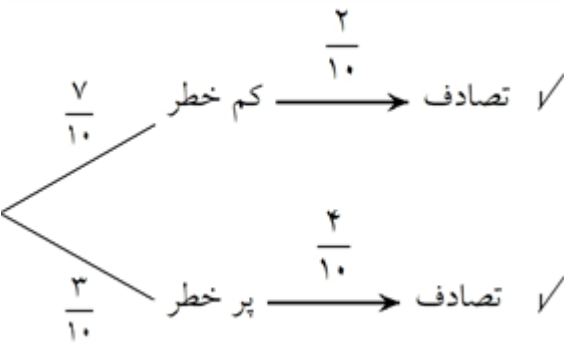
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = \cdot / ۶ \times \cdot / ۵ = \cdot / ۳$$

چون دو پیشامد مستقل هستند. بنابراین شرط بی‌تأثیر است، در نتیجه:

$$P(A|B) = P(A) = \cdot / ۶$$

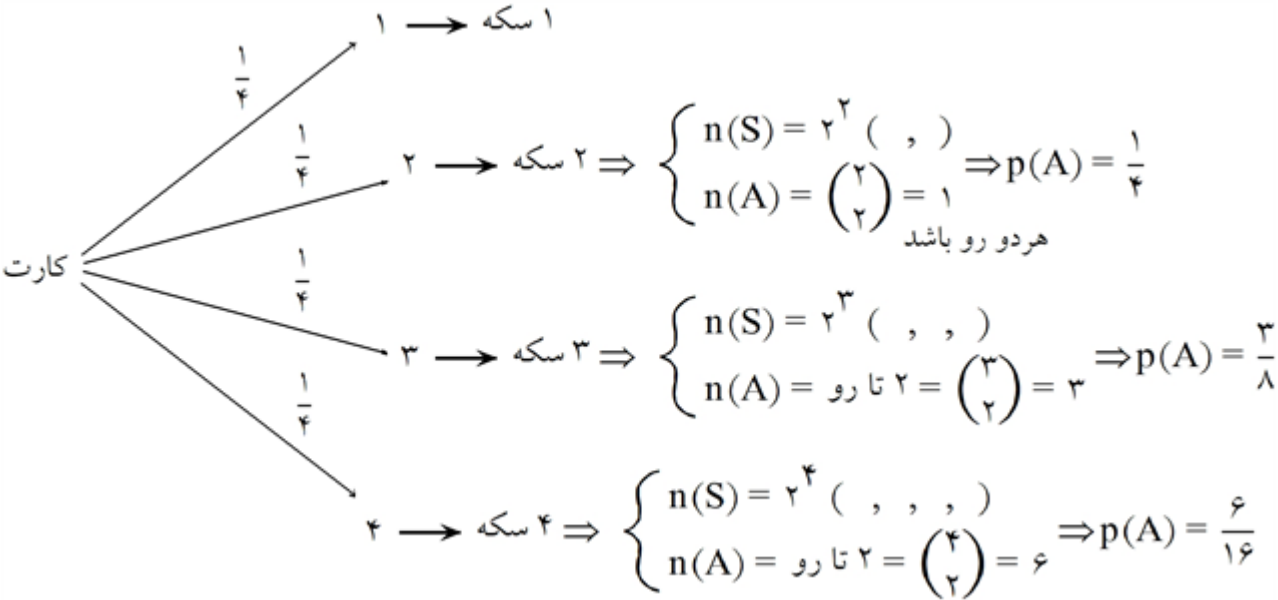
$$P(B|A) = P(B) = \cdot / ۵$$

P(A)	P(B)			P(A B)	P(B A)
۰/۶	۰/۵	۰/۸	۰/۳	۰/۶	۰/۵



الف) $\frac{۷}{۱۰} \times \frac{۲}{۱۰} + \frac{۳}{۱۰} \times \frac{۴}{۱۰} = \frac{۲۶}{۱۰۰} = \cdot / ۲۶$

ب) $p(\text{تصادف} | \text{پرخطر}) = \frac{p(\text{تصادف} \cap \text{پرخطر})}{p(\text{تصادف})} = \frac{\frac{۳}{۱۰} \times \frac{۴}{۱۰}}{\frac{۲۶}{۱۰۰}} = \frac{۱۲}{۲۶} = \frac{۶}{۱۳}$



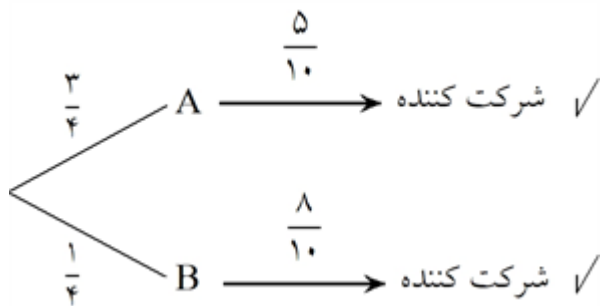
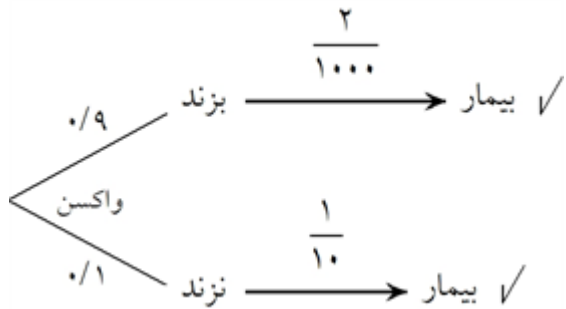
$$p(۲ \text{ رو } | \text{بیاید}) = \frac{p(۲ \text{ رو} \cap \text{بیاید})}{p(۲ \text{ رو})} = \frac{\frac{۱}{۴} \times \frac{۲}{۸}}{\frac{۱}{۴} \times \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴} \times \frac{۲}{۸} + \frac{۱}{۴} \times \frac{۶}{۱۶}} = \frac{\frac{۲}{۸}}{\frac{۱}{۴} + \frac{۲}{۸} + \frac{۶}{۱۶}} = \frac{۶}{۱۶} = \frac{۳}{۸}$$

$$\text{می دانیم: } p(B_i|A) = \frac{p(B_i \cap A)}{p(A)} \quad (I)$$

$$\text{از طرفی: } p(A|B_i) = \frac{p(A \cap B_i)}{p(B_i)} \Rightarrow p(B_i \cap A) = p(B_i) \times p(A|B_i) \quad (II)$$

$$I, II \rightarrow p(B_i|A) = \frac{p(B_i) \times p(A|B_i)}{p(A)}$$

$$\Rightarrow p(\text{بیمار}) = \frac{9}{20} \times \frac{2}{1000} + \frac{1}{10} \times \frac{1}{10} = \frac{118}{10000} = 0.0118$$



$$p(A|\text{شرکت کننده}) = \frac{p(A \cap \text{شرکت کننده})}{p(\text{شرکت کننده})} = \frac{\frac{3}{4} \times \frac{5}{10}}{\frac{3}{4} \times \frac{5}{10} + \frac{1}{4} \times \frac{8}{10}} = \frac{15}{23}$$

$$\text{می دانیم: } p(A \cap B) = p(B) \times p(A|B)$$

$$\begin{aligned} & \overbrace{p((A_1 \cap A_2) \cap A_3)}^B = p(B) \times p(A_3|B) = p(A_1 \cap A_2) \times p(A_3|(A_1 \cap A_2)) \\ & = p(A_1) \times p(A_2|A_1) \times p(A_3|(A_1 \cap A_2)) \end{aligned}$$

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

$$P(B) = \frac{n(B)}{n(S)} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(S)} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \xrightarrow{\text{برای دو پیشامد مستقل}} P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

دو پیشامد مستقل هستند.

مستقل

$$B, A : P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{21}$$

۵۶

$$۰/۹ = ۰/۱ : \text{احتمال عدم موفقیت دارو برای هر شخص}$$

۵۷

افراد از یکدیگر مستقل هستند. بنابراین:

$$۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ \times ۰/۱ = (۰/۱)^{10}$$

$$\frac{3}{6}$$

۵۸

$$\frac{3}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{1}{4}$$

بنابراین داریم:

ب) احتمال این که حداقل یک مهره آبی باشد، متمم احتمال این است که هیچ کدام آبی نباشد:

$$\frac{4}{6} \times \frac{4}{6} = \frac{16}{36}$$

احتمال این که هیچ کدام آبی نباشد:

$$1 - \frac{16}{36} = \frac{5}{9}$$

احتمال حداقل یک مهره آبی:

پ) هر دو مهره هم رنگ باشند یعنی یا هر دو قرمز باشند و یا هر دو آبی باشند.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{احتمال قرمز بودن هر دو مهره} \\ \text{احتمال آبی بودن هر دو مهره} \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{2}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{4}{36} \quad \Rightarrow \quad \frac{9}{36} + \frac{4}{36} = \frac{13}{36}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \{2, 4, 6, 8, 10\} \Rightarrow P(A) = \frac{5}{11} \\ B = \{3, 6, 9\} \Rightarrow P(B) = \frac{3}{11} \\ P(A \cap B) = \{6\} \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{11} \end{array} \right. \Rightarrow \frac{1}{11} \neq \frac{5}{11} \times \frac{3}{11}$$

۵۹

A و B مستقل نیستند.

$$P(A) = ۰/۶ \quad P(B) = ۰/۸ \Rightarrow P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = ۰/۶ \times ۰/۸ = ۰/۴۸$$

۶۰

مستقل اند.

ب) باید متمم آن ها را به دست آوریم:

$$P(A') = ۰/۴ \quad P(B') = ۰/۲$$

$$P(A' \cap B') = P(A') \times P(B') = ۰.۴ \times ۰.۲ = ۰.۰۸$$

$$P(A' \cap B) = P(A') \times P(B) = ۰.۴ \times ۰.۸ = ۰.۳۲$$

پ)

احتمال قبولی علی و رضا مستقل هستند.

۶۱

$$P(A) = ۰/۵$$

$$P(B) = ۰/۶$$

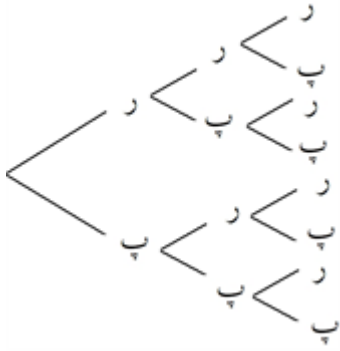
$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B) = ۰/۵ \times ۰/۶ = ۰/۳$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = ۰/۵ + ۰/۶ - ۰/۳ = ۰/۸$$

$$P(A - B) + P(B - A) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = ۰/۸ - ۰/۳ = ۰/۵$$

می‌دانیم فضای نمونه ۳ بار پرتاب سکه شامل 2^3 تایی مرتب است:

$$S = \{(ر, ر, ر), (ر, ر, پ), \dots, (پ, پ, پ)\} \Rightarrow n(S) = 8$$



$$A = \{(ر, ر, ر), (ر, ر, پ)\} \Rightarrow n(A) = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$B = \{(ر, ر, پ), (ر, پ, پ), (پ, ر, پ), (پ, پ, پ)\} \Rightarrow n(B) = 4 \Rightarrow P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$C = \{(پ, پ, ر), (پ, ر, پ), (ر, پ, پ)\} \Rightarrow n(C) = 3 \Rightarrow P(C) = \frac{3}{8}$$

$$A \cap B = \{(ر, ر, پ)\} \Rightarrow n(A \cap B) = 1 \Rightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{8} = P(A) \cdot P(B) \text{ مستقل } B, A$$

$$B \cap C = \{(ر, پ, پ), (پ, ر, پ)\} \Rightarrow n(B \cap C) = 2 \Rightarrow P(B \cap C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \neq P(B) \cdot P(C)$$

پس C, B مستقل نیستند.

توجه: دو پیشامد B, A را مستقل گوییم اگر و فقط اگر: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم:

$$4, 5, \underline{7}, 8, 10, \underline{11}, 12, 12, \underline{15}, 17, 19$$

Q_1 میانه Q_3

$$\text{دامنه تغییرات (الف)} = R = 19 - 4 = 15$$

$$\text{ب) } Q_3 = 15$$

$$\text{پ) } Q_1 = 7$$

$$\text{ت) دامنه میان چارکی} = Q_3 - Q_1 = 8$$

الف) $۲ + ۳ + ۱۳ + ۴۲ + ۵۸ + ۴۰ + ۳۱ + ۸ + ۲ + ۱ = ۲۰۰$

ب) $۱۱۰ \leq IQ$ بیش ترین نمره

$۱۵۰ \leq IQ$ کم ترین نمره

پ) $۲ + ۱ = ۳ \Rightarrow \frac{۳}{۲۰۰} \times ۱۰۰ = ۱/۵\%$

ت)

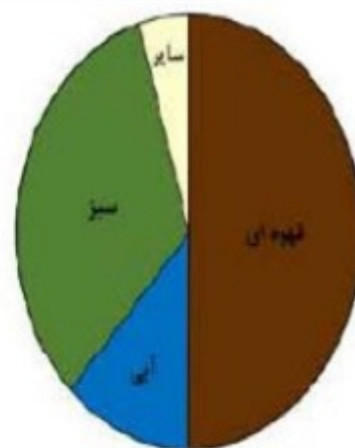
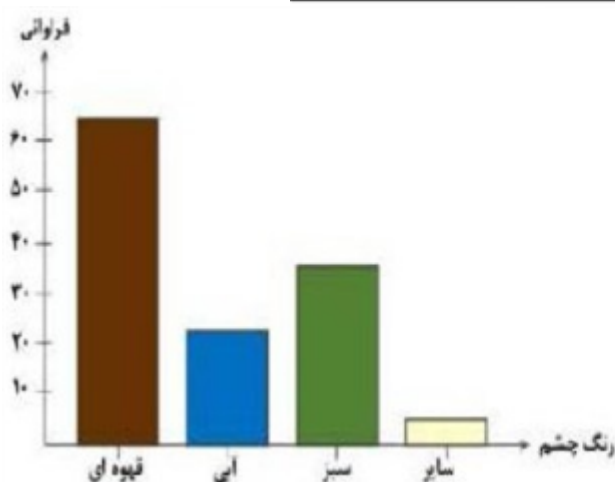
نمرات IQ	فراوانی
۷۰-۶۰	۲
۸۰-۷۰	۳
۹۰-۸۰	۱۳
۱۰۰-۹۰	۴۲
۱۱۰-۱۰۰	۵۸
۱۲۰-۱۱۰	۴۰
۱۳۰-۱۲۰	۳۱
۱۴۰-۱۳۰	۸
۱۵۰-۱۴۰	۲
۱۶۰-۱۵۰	۱
مجموع	۲۰۰

تعداد داده‌ها = مجموع تمام فراوانی‌ها

$$\overline{F_O} = ۰/۴ \Rightarrow \frac{F_O}{۲۰} = ۰/۴ \Rightarrow F_O = ۸$$

↑
فراوانی نسبی

رنگ چشم افراد	فراوانی	فراوانی نسبی $\uparrow$ $\alpha_i = f_i \times 360^\circ$ زاویه مربوط به هر دسته
قهوه‌ای	۶۴	$\frac{64}{128} \times 360 = 180$
آبی	۲۳	$\frac{23}{128} \times 360 = 64/7$
سبز	۳۶	$\frac{36}{128} \times 360 = 101/2$
سایر	۵	$\frac{5}{128} \times 360 = 14/1$
مجموع	۱۲۸	۳۶۰

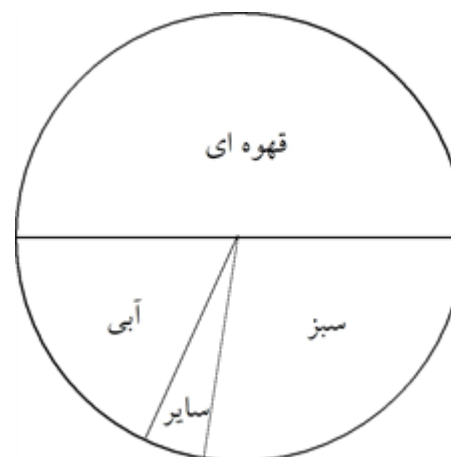


الف) برای متغیرهای پیوسته از نمودار بافت‌نگار استفاده می‌شود.

ب) برای متغیرهای گسسته از نمودارهای دایره‌ای و میله‌ای استفاده می‌شود.

پ) برای متغیرهای کیفی از نمودارهای دایره‌ای و میله‌ای استفاده می‌شود.

رنگ	فراوانی	زاویه نمودار
قهوه‌ای	۶۴	$\frac{64}{128} \times 360 = 180$
آبی	۲۳	$64/7$
سبز	۳۶	$101/2$
سایر	۵	$14/1$
جمع	۱۲۸	



۶۹ ابتدا داده‌ها را مرتب می‌کنیم.

۴, ۵, ۷, ۸, ۱۰, ۱۱, ۱۲, ۱۲, ۱۵, ۱۷, ۱۹

الف) چون تعداد داده‌ها فرد است، داده وسط میانه است.

ب) $۱۹ - ۴ = ۱۵$ دامنه تغییرات $\Rightarrow$ کوچکترین داده - بزرگترین داده = دامنه تغییرات

ج) مد: تکرار عدد ۱۲ بیشتر از سایر داده‌هاست. $۱۲ = \text{مد}$



$$\left(\begin{array}{cc} \frac{۴۷۰+۴۷۰}{۲} & \frac{۵۸۰+۴۷۰}{۲} \\ \frac{۶۹۰+۵۸۰}{۲} & \frac{۶۹۰+۶۹۰}{۲} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc} ۴۷۰ & ۵۲۵ \\ ۶۳۵ & ۶۹۰ \end{array} \right)$$

۷۰

۷۱ میانگین معیار بهتری است تا شرکت ضرر نکند.

$$\bar{x}_1 = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{13}}{13} = ۷ \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_{13} = ۹۱$$

$$\bar{x}_2 = \frac{x_{14} + x_{15} + \dots + x_{20}}{7} = ۵ \Rightarrow x_{14} + x_{15} + \dots + x_{20} = ۳۵$$

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{20}}{20} = \frac{۹۱ + ۳۵}{20} = \frac{۱۲۶}{20} = ۶/۳$$

$$\bar{x} = \frac{۱ \times ۱۲ + ۲ \times ۶ + ۳ \times ۴ + ۴ \times ۲ + ۶ \times ۱}{25} = \frac{۱۲ + ۱۲ + ۱۲ + ۸ + ۶}{25} = \frac{۵۰}{25} = ۲$$

میانگین ۲ می‌باشد پس به‌طور متوسط هر اتومبیل ۲ سرنشین دارد.

مد، ۱ سرنشین دارد.

$$\bar{x} = \frac{۳ \times ۴ + ۳ \times ۳ + ۲ \times ۲ + ۲ \times ۳ + ۳ \times ۲ + ۱ \times ۴}{14}$$

$$\bar{x} = \frac{۱۲ + ۹ + ۴ + ۶ + ۶ + ۴}{14} = \frac{۴۱}{14} \approx ۲/۹۳$$

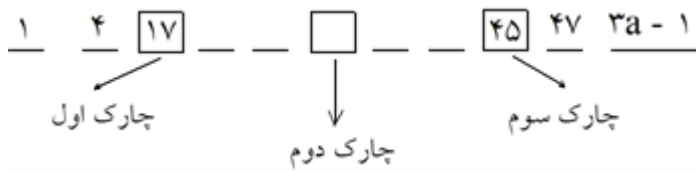
۷۵ چون این مجموعه مد دارد پس یکی از اعداد داخل مجموعه مد است. اگر $x = ۶۰$ باشد داریم:

۶۰, ۶۰, ۷۰, ۸۰, ۱۱۰

که در این حالت مد و میانه برابر نمی‌باشد به‌همین دلیل مد نمی‌تواند ۶۰ باشد.

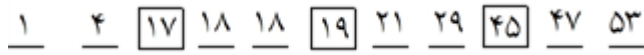
اگر $x = ۷۰$ باشد، مد و میانگین مساوی نمی‌باشد، پس $x = ۸۰$ قابل قبول است.

ابتدا داده‌ها را با توجه به مطالب داده‌شده مرتب می‌کنیم:



بنابراین داده‌های $a, a, 19, 21, 29$ بین چارک اول و سوم قرار می‌گیرند که میانگین آن‌ها برابر ۲۱ است.

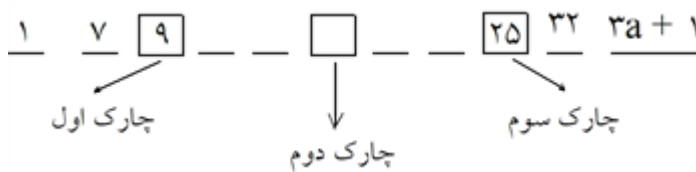
$$\frac{a + a + 19 + 21 + 29}{5} = 21 \Rightarrow 2a + 69 = 105 \Rightarrow 2a = 36 \Rightarrow a = 18$$



و در نهایت میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم برابر است با:

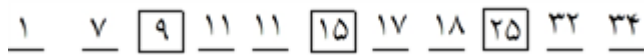
$$\bar{x} = \frac{47 + 53}{2} = 50.$$

ابتدا داده‌ها را با توجه به مطالب داده‌شده مرتب می‌کنیم:



بنابراین داده‌های $a, a, 15, 17, 18$ بین چارک اول و سوم قرار می‌گیرند که میانگین آن‌ها برابر $14/4$ است.

$$\frac{a + a + 15 + 17 + 18}{5} = 14/4 \Rightarrow 2a + 50 = 72 \Rightarrow 2a = 22 \Rightarrow a = 11$$



و در نهایت میانگین داده‌های بزرگ‌تر از چارک سوم برابر است با:

$$\bar{x} = \frac{32 + 34}{2} = 33$$

(الف) ۱۷ (ابتدای جعبه چارک اول است).

(ب) ۳۳ (انتهای جعبه چارک سوم است).

(پ) ۲۳ میانه با نقطه‌چین درون جعبه مشخص می‌شود.

(ت) زیرا داده‌ها در این قسمت متراکم‌تر هستند.

$$\bar{x} = 10.$$

$$\sigma^2 = 2$$

$$\bar{x}' = \frac{\bar{x}}{2} + 2 = \frac{10}{2} + 2 = 7$$

$$\sigma'^2 = \frac{1}{4}\sigma^2 = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \sigma' = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$CV' = \frac{\sigma'}{\bar{x}'} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{7} = \frac{\sqrt{2}}{14}$$

ضریب تغییرات جدید	انحراف معیار جدید	واریانس جدید	میانگین جدید	داده‌های جدید
$\frac{\sqrt{2}}{14}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	۷	$\frac{x_i}{2} + 2$

$$\bar{x} = 12$$

$$\sigma^2 = 3$$

$$\bar{x}' = 3\bar{x} + 2 = 3(12) + 2 = 38$$

$$\sigma'^2 = 9\sigma^2 = 9 \times 3 = 27 \Rightarrow \sigma' = \sqrt{27}$$

$$CV' = \frac{\sigma'}{\bar{x}'} = \frac{\sqrt{27}}{38}$$

ضریب تغییرات جدید	انحراف معیار جدید	واریانس جدید	میانگین جدید	داده‌های جدید
$\frac{\sqrt{27}}{38}$	$\sqrt{27}$	۲۷	۳۸	$3x_i + 2$

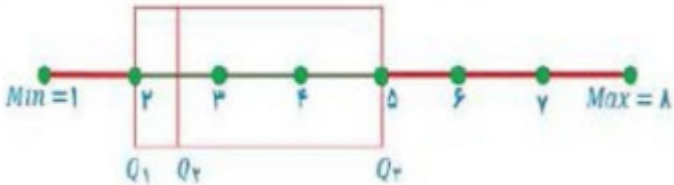
الف) میانگین شاخص توده‌ی بدنی در آقایان بیش‌تر است.

ب) توده‌ی پراکندگی یکسان است.

ابتدا داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم:

$$1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 7, 8$$

$$\min = 1, \max = 8, Q_1 = 2, Q_2 = \frac{2+3}{2} = 2.5, Q_3 = 5$$



$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} \Rightarrow 2 = \frac{\sigma}{4} \Rightarrow \sigma = 8 \Rightarrow \sigma^2 = 64$$

اعداد	انحراف معیار	واریانس	ضریب تغییرات
۱۰۰، ۱۲، ۸، ۱۶، ۱۰، ۴، ۷	۳۱/۸۶	۱۰۱۵/۳	۱/۴۲
۳، ۲، ۱، ۰، ۰، -۳، -۲، -۱	۱/۸۷	۳/۵	تعریف نشده
۱۰/۱۱، ۱۱/۳۶، ۱۰/۱۱ ۹/۸۸، ۹/۴۲، ۹/۷۶، ۹/۶۲	۰/۱۷	۰/۰۲۹	۰/۰۱۷
۲، ۳۰۰۰، ۲۵۰۰، ۲۰۰۰	۱۱۳۷/۹۸	۱۲۹۵۰۰۰/۷۵	۰/۶

توجه: واریانس = $\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$ / $\sigma =$ انحراف معیار = $\frac{\sum x_i}{n}$ / $\sigma^2 =$ واریانس

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{10.8/2}{9} = 12/0.2 \simeq 12$$

سال	x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
٨٥	١/٤	-١٠/٦	١١٢/٣٦
٨٦	٢/٨	-٩/٢	٨٤/٤٤
٨٧	٥	-٧	٤٩
٨٨	٩/٢	-٢/٨	٧/٨٤
٨٩	١٥/٢	٣/٢	١٠/٢٤
٩٠	١٧/٨	٥/٨	٣٢/٦٤
٩١	١٩	٧	٤٩
٩٢	١٨/٣	٦/٣	٣٩/٩٩
٩٣	١٩/٥	٧/٥	٥٦/٢٥
مجموع	١٠.٨/٢	-	٤٤٢/٦٦

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{442/66}{9} = 49/18$$

$$\sigma = \sqrt{49/18} = 7/0.1$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{7/0.1}{12} = 0.58$$

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} = \frac{5.4}{11} = 45/11 = 4.1$$

x_i	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$
٣٢	-١٤	١٩٦
٥٩	١٣	١٦٩
٢٦	-٢٠	٤٠٠
٥٣	٧	٤٩
٧٤	٢٨	٧٨٤
١٧	-٢٩	٨٤١
٤٥	-١	١
٢٣	-٢٣	٥٢٩
٦٤	١٨	٣٢٤
٥٠	٤	١٦
٦١	١٥	٢٢٥

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{3534}{11} = 321/27$$

$$\sigma = \sqrt{321/27} = 18/0.9$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}} = \frac{18/0.9}{4.1} = 0.39$$

$$R = \max - \min = 250 - 12 = 238 \quad \text{الف) ۸۷}$$

$$Q_1 = 43 \quad \text{ب)}$$

$$Q_2 = 80 / 5 \quad \text{پ)}$$

$$Q_3 = 100 \quad \text{ت)}$$

تمام داده‌ها با هم برابرند. ۸۸

$$5a - 5 = 10 \Rightarrow a = 3$$

$$2b = 10 \Rightarrow b = 5$$

$$\frac{c}{3} = 10 \Rightarrow c = 30$$

$$\bar{x} = \frac{a+b+c}{3} = \frac{3+5+30}{3} = \frac{38}{3}$$

با آماره میانگین نمونه آشنا هستیم که با استفاده از آن می‌توان میانگین جامعه را برآورد کرد. ۹۰

با آماره واریانس و انحراف معیار نمونه‌ی تصادفی از یک جامعه ۹۱

به کمک تابع Rand در ماشین‌حساب در هر سه حالت می‌توان عددی تصادفی انتخاب کرد. به این صورت که یک عدد بین ۰ و ۱ در نظر می‌گیریم و آن را در ۹ ضرب کرده و سپس گرد می‌کنیم تا عددی بین ۰ تا ۹ به صورت تصادفی انتخاب شود. حال اگر عددی که بین ۰ تا ۱ انتخاب کردیم را در ۹۹ ضرب کنیم می‌توان عددی بین ۰ تا ۹۹ به دست آورد و برای فهرست هزارتایی نیز به همین صورت عمل می‌کنیم. ۹۲

الف) خوشه‌ای ۹۳

ب) تصادفی

پ) سیستماتیک

الف) افرادی که نیستند انتخاب نمی‌شوند. ۹۴

ب) انتخاب براساس سلیقه صورت می‌گیرد.

پ) افرادی که ایمیل ندارند انتخاب نمی‌شوند.

ت) افرادی که تلفن ندارند انتخاب نمی‌شوند.

ث) فقط افرادی که مایل به پاسخگویی هستند انتخاب می‌شوند.

الف) وعده غذایی - کیفی ۹۵

ب) مصاحبه

پ) ۱۲۶۱ مشتری - پارامتر جامعه می‌تواند میانگین تعداد غذای سفارشی برای نهار در یک ماه باشد و آماره می‌تواند میانگین تعداد سفارش هر هفته باشد.

بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای دندان‌های کشیده شده:

$$\bar{x} - 2\sigma\sqrt{n} \leq M \leq \bar{x} + 2\sigma\sqrt{n} \Rightarrow 2 = 2(1)\sqrt{400} \leq M \leq 2 + 2(1)\sqrt{400} \\ \Rightarrow -38 \leq M \leq 42$$

بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای دندان‌های پوسیده شده:

$$2 - 2(2)\sqrt{400} \leq M \leq 2 + 2(2)\sqrt{400} \Rightarrow -78 \leq M \leq 82$$

بازه اطمینان ۹۵ درصدی برای دندان‌های پر شده:

$$2 - 2(1/6)\sqrt{400} \leq M \leq 2 + 2(1/6)\sqrt{400} \Rightarrow -62 \leq M \leq 66$$

الف) اگر پاره‌خط آبی، خط سیاه را قطع کند نشان‌دهنده‌ی این است که میانگین جامعه در بازه‌ی اطمینان ۹۵ درصدی وجود ندارد و بنابراین نمونه‌ی درستی انتخاب نشده است.

$$\frac{19}{20} \times 100 = 95\%$$

ب) ۱۹ پاره‌خط آبی، خط سیاه را قطع کرده‌اند. بنابراین:

پ) با توجه به این‌که ۹۵ درصد خطوط را قطع می‌کند پس با رسم ۱۰۰ پاره‌خط آبی، ۵ تا از آن‌ها خط سیاه را قطع نمی‌کنند.

ت) ۹۵%

$$50 \times 3) + 74 + 73 + (71 \times 2) + 70 + 67 + 79 + (78 \times 4) + 77 + 80 + 87 + (86 \times 2) + 83 + (82 \times 2) + 81 + 91$$

۹۷

۲۴

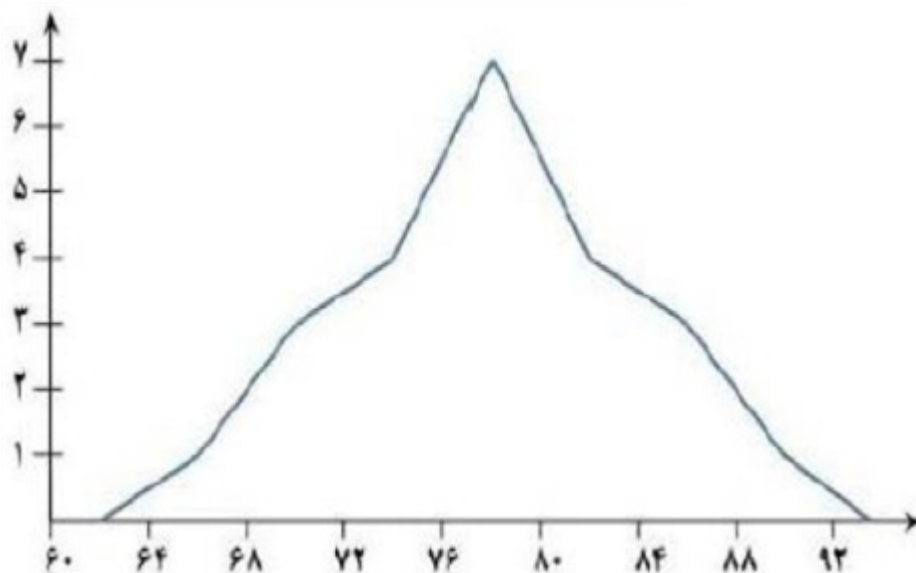
$$\bar{x} \approx 78 \quad \sigma = 5/5$$

$$ب) \bar{x} - 2\sigma \leq M \leq \bar{x} + 2\sigma \Rightarrow 78 - 12 \leq M \leq 78 + 12 \Rightarrow 66 \leq M \leq 90$$

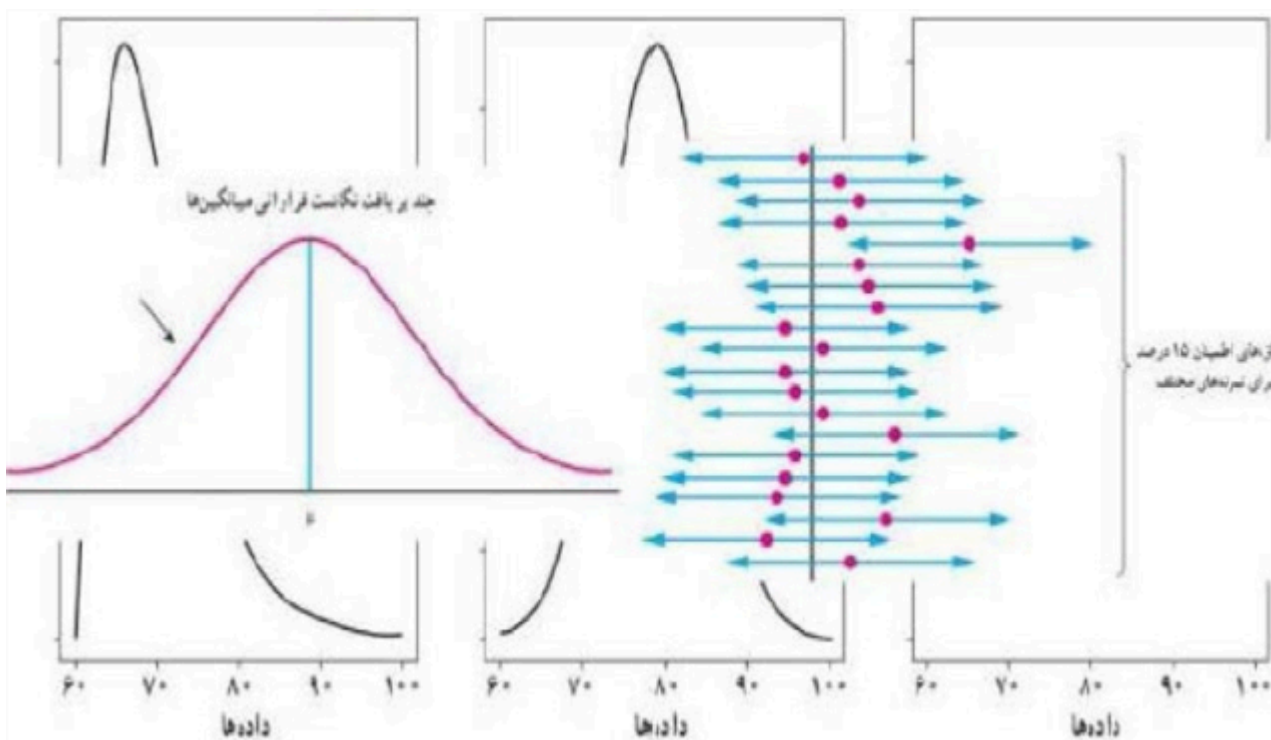
$$پ) \frac{23}{24} \times 100 = 95\%$$



(ث)



(ج) نرمال



۹۸

الف) اگر در فرمول بازه اطمینان اندازه‌ی نمونه افزایش یابد، طول فاصله‌ی اطمینان کاهش می‌یابد. زیرا دقت برآورد افزایش می‌یابد.

ب) اگر در فرمول بازه اطمینان انحراف معیار جامعه افزایش یابد، طول فاصله اطمینان افزایش می‌یابد. زیرا دقت برآورد کاهش می‌یابد.

۹۹

$$\bar{x} = 22 \Rightarrow \bar{x} - 2\sigma \leq M \leq \bar{x} + 2\sigma$$

$$\sigma = 1/9 \Rightarrow 22 - 3/8 \leq M \leq 22 + 3/8$$

$$2\sigma = 3/8 \Rightarrow 18/2 \leq M \leq 25/8$$

۱۰۰

الف) نمونه‌گیری طبقه‌ای. $\frac{1}{25}$

ب) نمونه‌گیری خوشه‌ای. $\frac{1}{5}$

پ) نمونه‌گیری سیستماتیک. $\frac{1}{5}$