

نمونه سوالات تشریحی ویژه امتحان نهایی ریاضیات گسسته

محمد علی رضائی

۱ ثابت کنید مربع هر عدد فرد به صورت $8q + 1$ است.

۲ اگر a عددی صحیح و دلخواه باشد، ثابت کنید همواره یکی از اعداد صحیح a یا $a + 2$ یا $a + 4$ بر ۳ بخش پذیر است.

۳ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی، حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج است.

۴ اگر a و b دو عدد حقیقی باشند، با استفاده از اثبات بازگشتی ثابت کنید: $2a^2 + b^2 + 1 \geq 2(a - ba)$

۵ برای هر دو عدد حقیقی x و y ، به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) نشان دهید:
$$2x^2 + 2xy + y^2 \geq 4x - 4$$

۶ گزاره زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز) ثابت کنید:
«برای هر دو عدد حقیقی x و y داریم: $y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1)$ »

۷ a_1, a_2, a_3 اعدادی صحیح هستند و b_1, b_2, b_3 هم همان اعداد ولی به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ عددی زوج است.

۸ ثابت کنید برای هر عدد طبیعی زوج n ، $5n + 7$ عددی فرد است.

۹ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.

۱۰ ثابت کنید اگر: $p \geq 5$ عددی اول باشد، آن‌گاه به یکی از دو صورت $p = 4k + 1$ یا $p = 4k + 3$ نوشته می‌شود.

۱۱ اگر α و β دو عدد گنگ باشند ولی $\alpha + \beta$ گویا باشد، با استفاده از برهان خلف ثابت کنید $\alpha - \beta$ گنگ است.

۱۲ اگر در یک تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه هر دو بر عدد صحیح n بخش پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش پذیر است.

۱۳ اگر p عددی اول باشد و $a \in \mathbb{Z}$ و $p \nmid a$ ثابت کنید: $(p, a) = 1$.

۱۴ اگر $a \mid b$ و $b \neq 0$ ، در این صورت ثابت کنید: $|a| \leq |b|$.

$$49|4k^2 - 10k - 6$$

۱۵ اگر عددی مانند k در Z باشد به طوری که $7|2k + 1$ ، ثابت کنید:

۱۶ باقی‌مانده تقسیم a بر دو عدد 4 و 5 به ترتیب برابر 3 و 4 می‌باشد، باقی‌مانده تقسیم a بر 20 را محاسبه کنید. (با راه‌حل)

۱۷ اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر دو عدد 6 و 7 به ترتیب 3 و 5 باشد، باقیمانده تقسیم عدد a بر 42 بیابید.

۱۸ اگر $a \neq 0$ عددی صحیح و دو عدد $(4m + 5)$ و $(6m + 5)$ بر a بخشپذیر باشند، ثابت کنید $a = \pm 1$.

۱۹ اگر عددی مانند k در Z باشد، به طوری که $5|4k + 1$ ، ثابت کنید $25|16k^2 + 28k + 6$.

۲۰ فرض کنید a عددی طبیعی باشد، حاصل $[21a^2, 35a^3]$ را به دست آورید.

۲۱ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
اگر a, b و c اعدادی طبیعی باشند که $a|b$ و $b|c$ ، در این صورت حاصل عبارت $([a, b], [a, c])$ برابر است.

۲۲ جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.
اگر k عددی صحیح باشد، باقی‌مانده تقسیم $19k - 300$ بر 19 برابر با است.

۲۳ اگر a و b عددی صحیح و فرد باشد و در این صورت باقیمانده تقسیم عدد $(a^2 + b^2 + 5)$ را بر 8 بیابید.

۲۴ اگر در تقسیم، مقسوم و مقسوم‌علیه، هر دو بر عدد صحیح n بخش‌پذیر باشند، ثابت کنید باقی‌مانده تقسیم نیز همواره بر n بخش‌پذیر است.

۲۵ باقی‌مانده تقسیم 2^{500} بر 13 را به دست آورید.

۲۶ رقم یکان عدد $A = 2! + 4! + 6! + \dots + 100!$ را به دست آورید.

۲۷ باقی‌مانده تقسیم عدد $A = 63^{14} + 1$ را بر 16 به دست آورید.

۲۸ ثابت کنید باقیمانده هر عدد بر 9 ، برابر است با باقیمانده تقسیم مجموع ارقام آن عدد بر 9 .

۲۹ اگر دو عدد $(2a - 5)$ و $(4a - 7)$ رقم یکان برابر داشته باشند، رقم یکان عدد $(9a + 6)$ را به دست آورید.

۳۰ ثابت کنید می‌توان دو طرف یک رابطه هم‌نهشتی را در عددی صحیح ضرب کرد، به عبارتی دیگر، برای اعداد صحیح a, b, c و عدد طبیعی m ، اگر $a \equiv b \pmod{m}$ آن‌گاه $ac \equiv bc \pmod{m}$.

۳۱ همه‌ی اعداد صحیح چون a را بیابید که 5 برابر آن‌ها به علاوه‌ی 9 بر 11 بخش‌پذیر باشد.

۳۲ اگر 12 بهمن در یک سال جمعه باشد، 31 مرداد ماه در همان سال چه روزی از هفته است؟

۳۳ با استفاده از بسط دو جمله‌ای خیام یعنی،

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} \times a^n + \binom{n}{1} \times a^{n-1}b + \binom{n}{2} \times a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3} \times a^{n-3}b^3 + \dots + \binom{n}{n} \times b^n$$
 ثابت کنید عدد $12^{51} - 11^{51} - 23^{51}$ بر عدد ۱۳۲ بخش‌پذیر است.

۳۴ اگر $a \equiv^m b$ و $n|m$ ثابت کنید $a \equiv^n b$.

۳۵ جواب عمومی معادله $4x \equiv 17$ را به دست آورید.

۳۶ معادله‌ی سیاله‌ی $38x + 34y = 120$ را در Z حل کنید.

۳۷ پست‌خانه‌ای فقط تمبرهای ۶۰ ریالی و ۹۰ ریالی برای فروش دارد. شخصی برای فرستادن یک بسته که نیاز به ۸۷۰ ریال تمبر دارد از هر نوع تمبر چه تعداد باید بخرد. (تمام حالات ممکن برای خرید تمبر نوشته شود.)

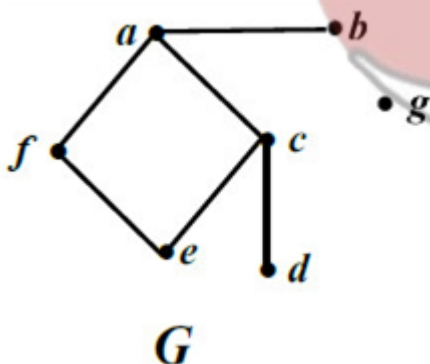
۳۸ درست یا نادرست بودن گزاره‌های زیر را مشخص کنید.
 الف) حاصل‌ضرب هر عدد گویا، در یک عدد گنگ، عددی گنگ است.
 ب) برای اعداد صحیح a, b و c که $a \neq 0$ ، اگر $a|b + c$ آن‌گاه $a|b$ یا $a|c$.
 ج) معادله هم‌نهشتی $ax \equiv^m b$ دارای جواب است اگر و فقط اگر $(a, m)|b$.
 د) اگر داشته باشیم $(a, b) = 1$ آن‌گاه می‌گوییم a و b نسبت به هم اول‌اند.

۳۹ در معادله سیاله $19y + 15x = 7$ ، بزرگترین عدد ۲ رقمی طبیعی که می‌توان برای x در نظر گرفت چه مقداری می‌باشد؟ (با راه‌حل)

۴۰ دانش‌آموز در یک آزمون علمی شرکت کرده است، او به سؤالات ۵ امتیازی و ۳ امتیازی پاسخ داده و مجموعاً ۴۲ امتیاز کسب کرده است. (پاسخ به هر سؤال یا امتیاز کامل دارد و یا امتیازی ندارد.) این دانش‌آموز به چه صورت‌هایی توانسته این امتیاز را کسب کند؟

۴۱ گراف ساده $G = (V, E)$ گرافی ۳-منتظم است. با افزودن ۶ یال به یال‌های این گراف، گرافی کامل به دست می‌آید.
 الف) ویژگی گراف G را مشخص کنید. (مرتبه و اندازه)
 ب) این گراف را رسم کنید.

۴۲ گراف G به صورت زیر رسم شده است. با توجه به سؤالات زیر پاسخ دهید.
 الف) مرتبه و اندازه آن را بنویسید.
 ب) مجموع درجات رئوس این گراف را به دست آورید.
 ج) مجموعه $N_G[c]$ را بنویسید.
 د) دوری به طول ۴ در این گراف بنویسید.
 ه) حاصل عبارت $q(\overline{G}) + \deg_{\overline{G}}(g)$ را به دست آورید.



- جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.
- (الف) گرافی را که بین هر دو رأس آن حداقل یک مسیر وجود داشته باشد، گراف می‌گوییم.
- (ب) تعداد رئوس فرد هر گراف عددی است.
- (ج) مینیمم درجه در گراف کامل از مرتبه p برابر است.
- (د) گرافی را که درجه تمام رئوس آن با هم مساوی و برابر با عدد k باشد، گراف می‌گوییم.

ثابت کنید تعداد رأس‌های فرد هر گراف، عددی زوج است.

در گراف G ، درجه رأس ۷ برابر با ۹ است و درجه رأس ۷ در گراف $\bar{G}$ برابر با ۱۲ است. مرتبه گراف G را مشخص کنید.

گراف G ، ۳-منتظم است و اندازه آن ۳ واحد کمتر از ۲ برابر تعداد رأس‌های گراف است. مرتبه گراف را به دست آورده و گراف G را رسم کنید.

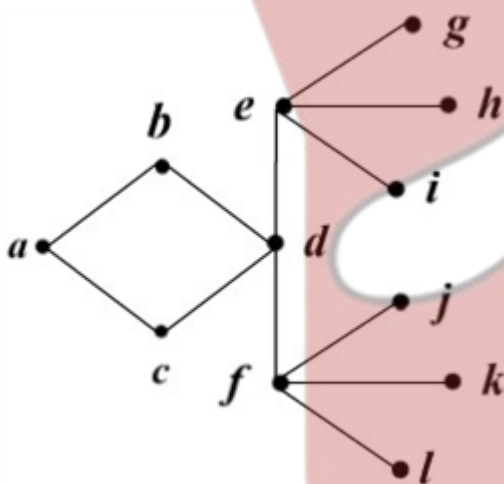
در یک گراف کامل تعداد رأس‌ها، $\frac{1}{3}$ تعداد یال‌هاست. مرتبه و اندازه‌ی این گراف را محاسبه کنید.

در گراف ۵-منتظم از مرتبه‌ی p و اندازه‌ی q رابطه $2q - 2p = 12$ برقرار می‌باشد، مقادیر p و q را به دست آورید.

فرض کنید G گرافی است از مرتبه‌ی ۷ و اندازه‌ی ۹ به‌طوری‌که درجه هر رأس آن ۲ یا ۳ می‌باشد. تعیین کنید این گراف چند رأس از درجه ۲ و چند رأس از درجه ۳ دارد؟

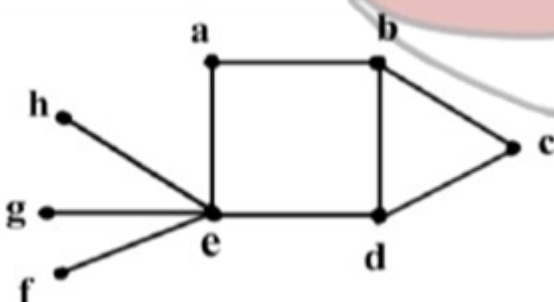
گراف زیر را در نظر بگیرید:

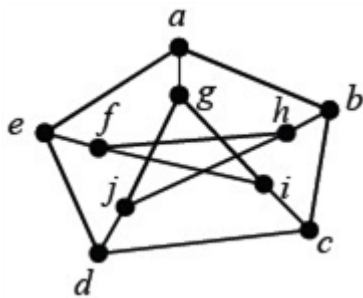
- (الف) عدد احاطه‌گری گراف را با ذکر دلیل، به دست آورید.
- (ب) یک مجموعه احاطه‌گر مینیمال ۸ عضوی بنویسید.
- (ج) یک مجموعه احاطه‌گر غیرمینیمال ۴ عضوی بنویسید.



(الف) عدد احاطه‌گری گراف مقابل را با ارائه راه‌حل، تعیین کنید.

(ب) این گراف چند γ - مجموعه دارد؟





۵۲ عدد احاطه‌گری گراف زیر را مشخص و ادعای خود را ثابت کنید.

۵۳ اگر n تعداد رئوس گراف و Δ ماکزیمم درجه گراف باشد
 الف) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گر برابر $\frac{n}{\Delta + 1}$ است.
 ب) گرافی رسم کنید که برای آن عدد احاطه‌گری بزرگ‌تر از $\frac{n}{\Delta + 1}$ باشد.

۵۴ اگر عدد احاطه‌گری در یک گراف ۵ رأسی برابر یک باشد در این صورت $\Delta(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یال‌هایی را که گراف G می‌تواند داشته باشد مشخص کنید.

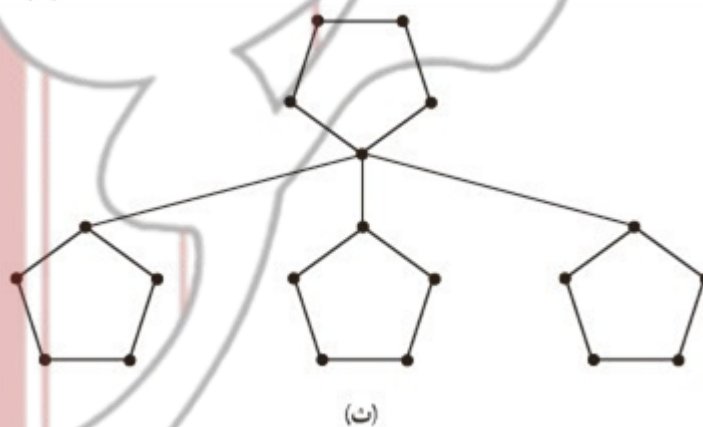
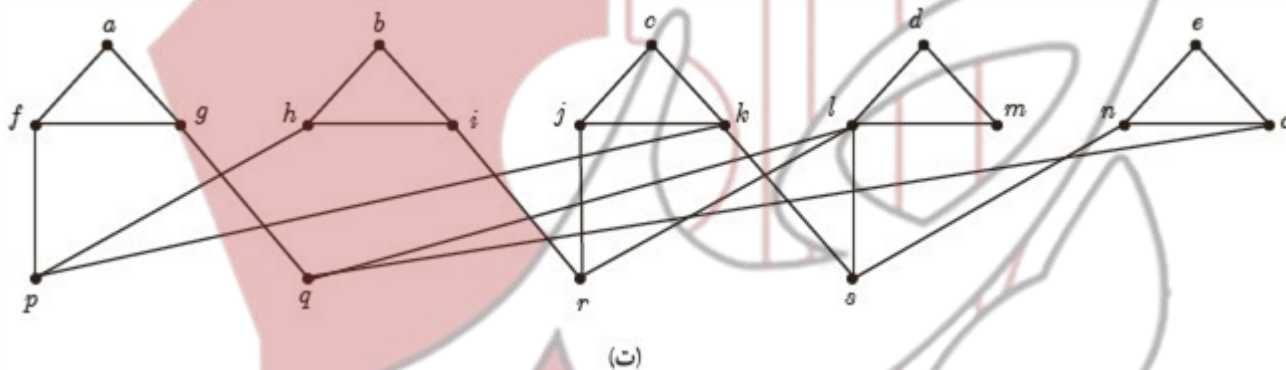
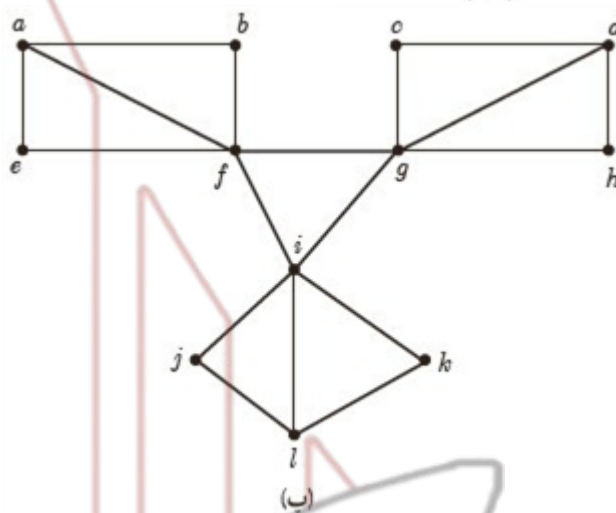
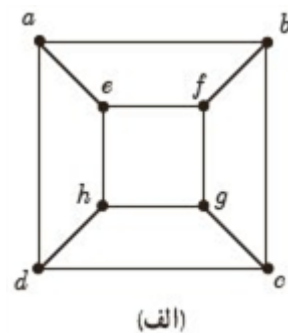
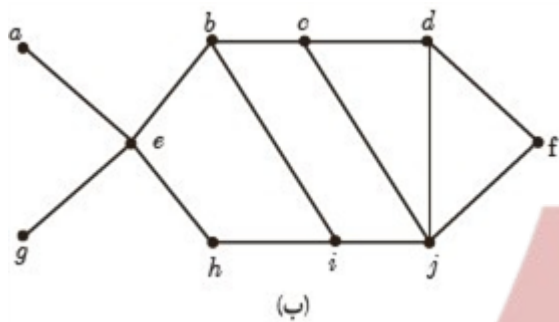
۵۵ الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه ۲ داشته باشد.
 ب) یک گراف ۶ رأسی احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه احاطه‌گر با اندازه ۲ داشته باشد.

۵۶ برای هر $n \in \mathbb{N}$ ($n \geq 4$) دلخواه توضیح دهید که:
 الف) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه احاطه‌گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.
 ب) چگونه می‌توانید یک گراف n رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه‌ی احاطه‌گر با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.

۵۷ الف) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که یک مجموعه‌ی احاطه‌گر یکتا با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.
 ب) یک گراف ۶ رأسی با عدد احاطه‌گری ۲ رسم کنید که بیش از یک مجموعه‌ی احاطه‌گر با اندازه‌ی ۲ داشته باشد.

۵۸ $\gamma(P_n)$ و $\gamma(C_n)$ را به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ مشخص کنید.

عدد احاطه‌گری را برای هریک از گراف‌های زیر مشخص نمایید.



به گراف ۸ رأسی ۳- منتظم چند یال اضافه کنیم تا تبدیل به گراف کامل شود؟ (با راه‌حل)

۶۱ الف) یک گراف ۶ رأسی که $\chi -$ مجموعه‌ی آن با اندازه یک باشد رسم کنید.
 ب) یک گراف ۶ رأسی که $\chi -$ مجموعه‌ی آن با اندازه دو باشد رسم کنید.
 پ) فرض کنید n و k دو عدد طبیعی باشند و $k \leq \frac{n}{2}$. روشی برای رسم یک گراف n رأسی که عدد احاطه‌گری آن k باشد، ارائه دهید.

۶۲ اگر برای گراف G داشته باشیم $\chi(G) = 1$ ، در این صورت به چه ویژگی‌هایی از گراف G می‌توان پی برد؟ $\Delta(G)$ و حداقل و حداکثر تعداد یال‌هایی را که گراف G می‌تواند داشته باشد مشخص کنید.

۶۳ علی، سامان، محمد، ناصر و مهرداد، در یک شبکه‌ی اجتماعی عضو هستند و هر کدام از آن‌ها ممکن است در فهرست دوستان هر کدام از ۴ نفر دیگر باشد یا نباشد.
 الف) چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟
 ب) اگر بودن در فهرست دوستان به این صورت باشد که هر دو نفر، یا هر دو در فهرست دوستان هم هستند و یا هیچ‌کدام در فهرست دوستان دیگری نیست، در این صورت چند حالت مختلف می‌تواند وجود داشته باشد؟

۶۴ ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم به طوری که:
 الف) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند.
 ب) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند.
 ج) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

۶۵ ۴ کتاب فیزیک متفاوت و ۵ کتاب ریاضی متفاوت را می‌توانیم به چند طریق در قفسه‌ای و در یک ردیف بچینیم. به نظر شما، این عمل به چند روش امکان‌پذیر است؟ اگر:
 الف) هیچ محدودیتی نباشد؛
 ب) همواره کتاب‌های فیزیک کنار هم باشند؛
 پ) هیچ دو کتاب ریاضی کنار هم نباشند؛
 ت) یک کتاب ریاضی خاص و دو کتاب فیزیک خاص همواره کنار هم باشند.

۶۶ اگر داشته باشیم $A = \{1, 2, 3, 4\}$ و $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ ، در این صورت چند رمز یا کد ۵ رقمی می‌توان نوشت که هریک شامل دو رقم از A و سه رقم از B باشد؟

۶۷ می‌خواهیم ۸ نفر را که دوبره‌دو برادر یک‌دیگرند در دو طرف طول یک میز مستطیل شکل بنشانیم. اگر بخواهیم هر نفر روبه‌روی برادرش بنشیند، به چند طریق می‌توان این کار را انجام داد؟

۶۸ نشان دهید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ برابر با $\binom{n-1}{k-1}$ است.

۶۹ معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_2 = 4$ و $x_4 \geq 3$ باشد؟

۷۰ معادله $x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 10$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد؟

۷۱ معادله $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 12$ چند جواب صحیح و نامنفی دارد به شرط آن‌که $x_3 = 4$ و $x_5 > 2$ باشد؟

۷۲ تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادله $x_1 + x_2 + x_3 = 25$ با شرط $5 \leq x_2 < 10$ و $6 \leq x_1 < 9$ را محاسبه کنید.

۷۳

یک ماتریس $n \times n$ از اعداد متمایز مثلاً $1, 2, 3, \dots, n^2$ را یک مربع وقفی (یا مربع جادویی) می‌نامیم، هر گاه حاصل جمع درایه‌های هر سطر، حاصل جمع درایه‌های هر ستون، حاصل جمع درایه‌های قطر اصلی، و حاصل جمع درایه‌های قطر فرعی با هم مساوی باشند.

به عنوان مثال یک مربع وقفی 3×3 در روبرو نشان داده شده است.

ثابت کنید که در هر مربع وقفی 3×3 که از اعضای $1, 2, 3, \dots, 9$ تشکیل شده است عضوی که در مرکز مربع قرار می‌گیرد همیشه عدد ۵ است.

۲	۷	۶
۹	۵	۱
۴	۳	۸

۷۴

به چند روش می‌توان از بین ۵ نوع گل ۱۶ شاخه گل انتخاب کرد به طوری که، از گل نوع سوم فقط ۳ شاخه و از گل نوع چهارم دست کم سه شاخه و از گل نوع پنجم بیش از چهار شاخه انتخاب کنیم؟

۷۵

قرار است ۳ راننده با ۳ نوع ماشین در ۳ مسیر متفاوت در ۳ روز اول هفته رانندگی کنند به گونه‌ای که هر راننده با هر نوع ماشین، هر مسیری را دقیقاً یکبار طی کرده باشد و نیز هر ماشین، هریک از مسیرها را دقیقاً یک بار طی کند. برای این مسئله برنامه‌ریزی کنید.

۷۶

ابتدا شرط متعامد بودن دو مربع لاتین را نوشته و سپس دو مربع لاتین متعامد از مرتبه ۳ بنویسید.

۷۷

در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.

مجموع درایه‌های سطر اول یک مربع لاتین ۵ در ۵ برابر با است.

۷۸

یک نجار در هفته ۴ مدل مختلف صندلی در ۳ رنگ متفاوت می‌سازد. او در یک هفته حداقل چند صندلی بسازد تا مطمئن باشیم. لاقل ۳ صندلی هم رنگ و هم مدل ساخته است؟

۷۹

در بین اعداد طبیعی ۱ تا ۵۰۰ ($1 \leq n \leq 500$) چند عدد وجود دارد که بر هیچ‌یک از اعداد ۴ و ۵ بخش پذیر نباشند؟

۸۰

چند رمز ۴ رقمی با ارقام ۱ تا ۵ می‌توان نوشت به طوری که هر رمز، حداقل یک رقم ۳ و یک رقم ۲ را شامل باشد؟ (نیاز به محاسبه پاسخ نهایی نمی‌باشد)

۸۱

به چند طریق می‌توان ۵ سیب را بین ۳ نفر توزیع کرد، به طوری که هر نفر حداقل یک سیب داشته باشد؟

۸۲

به چند طریق می‌توان از بین ۶ نوع گل متفاوت، ۱۰ شاخه گل انتخاب کرد به طوری که از گل نوع سوم حداقل ۴ شاخه و از نوع ششم بیش از ۲ شاخه انتخاب کنیم؟

۸۳

مجموعه $S = \{1, 2, \dots, 40\}$ را در نظر بگیرید. چند عدد در S وجود دارند به طوری که نه بر ۵ و نه بر ۷ بخش پذیر باشند.

۸۴

در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۵ نفر فوتبال و ۱۴ نفر والیبال بازی می‌کنند. مشخص کنید چند نفر نه فوتبال بازی می‌کنند و نه والیبال، به شرط آن که بدانیم ۹ نفر هم فوتبال و هم والیبال بازی می‌کنند.

۸۵

به چند طریق می‌توان ۵ کتاب مختلف را بین ۸ نفر توزیع کرد، اگر بخواهیم به هر نفر حداکثر یک کتاب بدهیم؟

۸۶

اگر بخواهیم یک قفل دارای رمز ۵ رقمی و فاقد صفر را که سه رقم آن ۷ و ۲ و ۳ هستند باز کنیم و تمام اعداد ۵ رقمی را که شامل حداقل یک رقم ۷ و یک رقم ۲ و یک رقم ۳ هستند در اختیار داریم و بستن و امتحان کردن هریک از این اعداد ۵ رقمی، ۶ ثانیه طول بکشد، برای باز کردن این قفل حداکثر چه قدر زمان نیاز داریم؟

۸۷ در یک کلاس ۳۴ نفری، ۱۵ نفر فوتبال بازی می‌کنند، ۱۱ نفر والیبال و ۹ نفر بسکتبال بازی می‌کنند. اگر بدانیم ۱۰ نفر عضو هیچ‌یک از این سه تیم نبوده و ۵ نفر فوتبال و والیبال، ۶ نفر والیبال و بسکتبال و ۳ نفر فوتبال و بسکتبال بازی می‌کنند. مشخص کنید:

(الف) چند نفر هر سه رشته‌ی ورزشی را بازی می‌کنند؟

(ب) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟

(پ) چند نفر والیبال بازی می‌کنند ولی بسکتبال بازی نمی‌کنند؟

(ت) چند نفر فقط در یک رشته بازی می‌کنند؟

۸۸ مطلوب است تعداد جواب‌های صحیح و نامنفی هریک از معادلات زیر با شرط‌های داده شده:

(الف) $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10$ $x_i > 0, 2 \leq i \leq 5$

(ب) $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12$ $x_1 > 20, x_5 \geq 4$

(پ) $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11$ $x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$

(ت) $x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 7$ $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$

(ث) $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3$ $x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$

۸۹ به چند طریق می‌توان ۴ خودکار متفاوت را بین سه نفر توزیع کرد به شرط آن‌که به هر نفر حداقل ۱ خودکار داده باشیم؟ (راه حل نوشته شود.)

۹۰ مجموعه‌ی اعداد $A = \{1, 2, \dots, 84\}$ را در نظر می‌گیریم. نشان دهید هر زیرمجموعه‌ی ۴۳ عضوی از A دارای حداقل ۲ عضو است که مجموعشان برابر با ۸۵ باشد.

۹۱ ثابت کنید در بین هر سه عدد طبیعی حداقل دو عدد طبیعی وجود دارد که مجموعشان عددی زوج باشد.

۹۲ با استفاده از اصل شمول و عدم شمول، تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ۴ عضو به یک مجموعه ۳ عضوی را به دست آورید.

۹۳ به چند طریق می‌توان ۶ فیلم سینمایی را بین سه داور برای داوری تقسیم کرد، به طوری‌که هر داور حداقل یک فیلم را داوری کند؟

۹۴ شرکت‌کنندگان در یک آزمون ریاضی ۳۰۷۳ نفر می‌باشند. حداقل چند شرکت‌کننده وجود دارد که حرف اول نام و نام‌خانوادگی آن‌ها به زبان فارسی یکسان است؟ دلیل ارائه کنید.

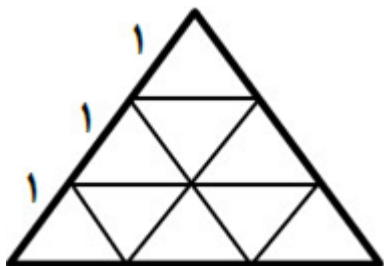
۹۵ S یک زیر مجموعه ۴۰ عضوی از اعداد طبیعی است. اگر اعضای S را بر عدد ۳۹ تقسیم کنیم، نشان دهید حداقل دو عضو از این مجموعه دارای باقی‌مانده‌ی یکسانی بر ۳۹ هستند.

۹۶ پنج نقطه داخل مربعی به ضلع ۲ واحد مفروض‌اند، ثابت کنید حداقل فاصله‌ی دو نقطه از این پنج نقطه کمتر از $\sqrt{2}$ است.

۹۷ هفت نقطه درون مستطیلی به ابعاد ۴ و ۶ متر انتخاب می‌کنیم، ثابت کنید حداقل ۲ نقطه از آن‌ها فاصله‌ای کمتر از $2\sqrt{2}$ متر را دارند.

۹۸ تعداد اعداد صحیح مثبت کوچک‌تر از ۵۰۰ که نسبت به ۵۰۰ اولند را محاسبه کنید.

یک مثلث متساوی‌الاضلاع را به طول ضلع ۳ واحد تقسیم‌بندی کرده‌ایم. نشان دهید اگر ۱۰ نقطه دلخواه از داخل این مثلث اختیار کنیم حداقل دو نقطه بین این نقاط وجود خواهد داشت به قسمی که فاصله آن‌ها از یکدیگر کمتر از یک باشد.



اگر سه دوست هم سبیل، سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباسها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هریک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یکبار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟



پاسخ نامه تشریحی

$$a = 2k + 1 \xrightarrow{+2} a^2 = 2k^2 + 2k + 1 = 2k(k+1) + 1 = 2(2q) + 1 = 4q + 1$$

ضرب ۲ عدد متوالی، $2k$ فاکتور می دهد. مضرب ۲ می باشد.

۱

۲ طبق الگوریتم تقسیم داریم: $a = 3k$ که بر ۳ بخش پذیر است. یا $a = 3k + 1 \Rightarrow a + 2 = 3(k+1)$ یا $a = 3k + 2 \Rightarrow a + 4 = 3(k+2)$ که در هر دو مورد بر ۳ بخش پذیر هستند. (ص ۱۵)

۲

۳ برای این که مجموع دو عدد زوج باشد، هر دو عدد یا باید زوج باشند و یا هر دو فرد. بنابراین تعداد لانه ها برابر ۲ و تعداد کبوترها ۳ است. طبق اصل کبوتری حداقل یک لانه وجود دارد که دو کبوتر در آن قرار می گیرند. یعنی حداقل دو عدد طبیعی از بین سه عدد وجود دارد که مجموعشان زوج خواهد شد. (ص ۸۳)

۳

$$2a^2 + b^2 + 1 \geq 2(a - ba) \Leftrightarrow a^2 + a^2 + b^2 + 1 - 2a + 2ba \geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 + (a+b)^2 \geq 0$$

چون رابطه فوق همواره برقرار است، پس حکم درست است.

۴

$$2x^2 + 2xy + y^2 \geq 4x - 4 \Leftrightarrow x^2 + 2xy + y^2 + x^2 - 4x + 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 + (x-2)^2 \geq 0$$

این رابطه همواره برقرار است. (ص ۸)

۵

$$y^2 + 1 \geq -2x(y + x + 1) \Leftrightarrow x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 + (x+y)^2 \geq 0$$

(ص ۸ و ۷) این رابطه بازگشتی همواره بدیهی است $\Rightarrow$

۶

۷ اگر $(a_1 - b_1)(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)$ زوج نباشد (فرض خلف) پس عددی فرد است، پس هر سه عامل $(a_1 - b_1)$ و $(a_2 - b_2)$ و $(a_3 - b_3)$ هم باید فرد باشد. در نتیجه مجموع آن ها هم باید فرد باشد. اما با توجه به فرض مسئله: مجموع این سه عبارت برابر صفر است که عددی زوج است. با توجه به تناقض ایجاد شده، فرض خلف باطل و حکم ثابت می شود. (ص ۶)

۷

$$n = 2k \Rightarrow n^2 - 5n + 7 = 4k^2 - 10k + 6 + 1 = 2(2k^2 - 5k + 3) + 1 = 2q + 1 \quad (ص ۴)$$

۸

۹ فرض خلف: فرض کنیم $\alpha - \beta$ گویا باشد. می دانیم جمع دو عدد گویا عددی گویا است. پس $(\alpha + \beta) + (\alpha - \beta) \in \mathbb{Q}$ یعنی $2\alpha \in \mathbb{Q}$. در نتیجه $\alpha \in \mathbb{Q}$ و این با فرض گنگ بودن α تناقض دارد. پس فرض خلف باطل و حکم اثبات می شود. (ص ۸)

۹

$$p = 4k(1), p = 4k + 1(2), p = 4k + 2 = 2(2k + 1)(3), p = 4k + 3(4)$$

۱۰

در حالت ۱ و ۳، p عددی زوج است که با اول بودن آن تناقض دارد. بنابراین اعداد اول به فرم ۲ یا ۴ خواهند بود. (ص ۱۵)

۱۱ فرض خلف: $\alpha - \beta$ گویاست. (ص ۸)

۱۱

$$\alpha - \beta = m \in \mathbb{Q} \Rightarrow 2\alpha = m + n \Rightarrow \alpha = \frac{m+n}{2} \Rightarrow \alpha \in \mathbb{Q} \quad (\text{تناقض با فرض})$$

۱۲ با فرض $a = nk$ و $b = nk'$ داریم:

$$a = bq + r \Rightarrow nk = nk'q + r \Rightarrow nk - nk'q = r \Rightarrow r = n \underbrace{(k - k'q)}_{q''} \Rightarrow n|r$$

۱۳ برهان خلف:

$$(p, a) = d \Rightarrow \begin{cases} d|p \xrightarrow{اول} d = 1 \text{ یا } d = p \\ d|a \end{cases}$$

$$d = p \xrightarrow{d|a} p|a \text{ (تناقض دارد)} \Rightarrow d = 1 \Rightarrow (p, a) = 1$$

$$a|b \Rightarrow b = aq, q \in \mathbb{Z} \Rightarrow |b| = |a| |q|$$

$$q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \Rightarrow |q| \geq 1 \Rightarrow |a| |q| \geq |a| \Rightarrow |b| \geq |a| \text{ (ص ۱۱)}$$

$$7|2k+1 \Rightarrow \begin{cases} 49|4k^2+4k+1 \\ 49|14k+7 \end{cases} \Rightarrow 49|4k^2-10k-6 \text{ (ص ۱۶)}$$

$$\begin{cases} a = 5q_1 + 4 \xrightarrow{\times 4} 4a = 20q_1 + 16 \\ a = 4q_2 + 3 \xrightarrow{\times 5} 5a = 20q_2 + 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a = 20q_1 + 16 \\ 5a = 20q_2 + 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5q_1' + 4 \\ a = 4q_2' + 3 \end{cases} \Rightarrow a = 20q' + 19 \text{ (ص ۱۶)}$$

$$\begin{aligned} a &= 6q + 3 & 7a &= 42q + 21 \\ a &= 7q' + 5 & 6a &= 42q' + 30 \end{aligned} \Rightarrow a = 42(q - q' - 1) + 33 \Rightarrow r = 33 \text{ (ص ۱۴)}$$

$$\begin{aligned} a|6(5m+4) &\Rightarrow a|5(6m+5) - 6(5m+4) \Rightarrow a|1 \Rightarrow a = \pm 1 \text{ (ص ۱۱)} \\ a|5(6m+5) &\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5|4k+1 &\Rightarrow 25|16k^2+8k+1 \xrightarrow{+} 25|16k^2+28k+6 \text{ (ص ۱۶)} \\ 5|4k+1 &\Rightarrow 25|20k+5 \end{aligned}$$

$$A = 21a^r = 3 \times 7 \times a^r, B = 35a^r = 5 \times 7 \times a^r \Rightarrow [A, B] = 105a^r \text{ (ص ۱۷)}$$

۲۱ b (ص ۱۳)

۲۲ ۴ (ص ۱۴)

۲۳ می‌دانیم مربع هر عدد فرد، به صورت $4k+1$ می‌باشد ($k \in \mathbb{Z}$) پس داریم: (ص ۱۶)

$$\begin{cases} a^r = 4k+1 \\ b^r = 4k'+1 \end{cases} \Rightarrow a^r + b^r + 5 = 4k+1 + 4k'+1 + 5 \Rightarrow a^r + b^r + 5 = 4k''+7 \Rightarrow r = 7$$

$$a = bq + r, 0 \leq r < b \Rightarrow a - bq = r \Rightarrow \begin{cases} n|a \\ n|b \end{cases} \Rightarrow n|a - bq \Rightarrow n|r \text{ (ص ۱۷)}$$

$$2^6 \equiv -1 \Rightarrow (2^6)^{13} \equiv (-1)^{13} \Rightarrow 2^{78} \equiv -1 \xrightarrow{\times 2^2} 2^{80} \equiv -4$$

$$\Rightarrow 2^{80} \equiv 13 - 4 \Rightarrow 2^{80} \equiv 9$$

۲۵

$$A = 2! + 4! + 6! + \dots + 100! \Rightarrow A = 2! + 4! + 10k, k \in \mathbb{Z}$$

مضرب ۲ و ۵

۲۶

$$\Rightarrow A \equiv 2 + 24 + 0 \Rightarrow A \equiv 26 \equiv 6 \pmod{29} \text{ (ص ۲۹)}$$

$$63 \equiv -1 \Rightarrow 63^{16} \equiv 1 \Rightarrow A \equiv 2 \Rightarrow r = 2 \text{ (ص ۲۱)}$$

۲۷

عدد n رقمی $A = a_{n-1}a_{n-2}\dots a_1a_0$ را بسط می‌دهیم و در هم‌نهمشتی به پیمانه ۹ به جای هر توان ۱۰ عدد ۱ را قرار می‌دهیم، داریم: (ص ۲۲)

۲۸

$$A = 10^{n-1} \times a_{n-1} + \dots + 10^2 a_2 + 10 a_1 + 1 a_0 \Rightarrow A \equiv 1 \times a_{n-1} + \dots + 1 \times a_1 + a_0$$

$$\Rightarrow A \equiv a_{n-1} + \dots + a_1 + a_0$$

$$4a - 7 \equiv 3a - 5 \Rightarrow a \equiv 2 \Rightarrow 9a + 6 \equiv 24 \equiv 4 \Rightarrow r = 4 \text{ (ص ۲۹)}$$

۲۹

$$a \equiv b \Rightarrow m|a - b \Rightarrow m|c(a - b) \Rightarrow m|ac - bc \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m} \text{ (ص ۱۹)}$$

۳۰

$$5a + 9 \equiv 0 \Rightarrow 5a \equiv -9 \Rightarrow 5a \equiv -9 + 4 \times 11 = 35 \xrightarrow{\div 5} a \equiv 7$$

$$\Rightarrow a = 11k + 7, k \in \mathbb{Z}$$

۳۱

$$31 \text{ مرداد} + 4 \times 30 + 12 \equiv 2 \pmod{7}$$

۳۲

در جدول برای روز جمعه عدد ۲ را می‌نویسیم، سپس اعداد قبل و بعد آن را تعیین می‌کنیم، عدد صفر مربوط به ۳۱ مرداد است.

چ	پ	ج	ش	ی	د	س
۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶

۳۱ مرداد چهارشنبه بوده است

شروع (چهارشنبه)

۳۱ مرداد

روش دوم:

جمعه

۱۲ بهمن

$$31 \text{ روز} + 4 \times 30 + 12 \equiv 2 \pmod{7}$$

شهریور

۴ تا ۳۰ روز

پس ۲ روز جلو می‌رویم.

$$(23)^{51} = (11 + 12)^{51} \stackrel{11 \times 12}{\equiv} 11^{51} + 12^{51} \xrightarrow{-11^{51} - 12^{51}} 23^{51} - 11^{51} - 12^{51} \equiv 0.$$

عدد $23^{51} - 11^{51} - 12^{51}$ بر بخش پذیر است $132 \Rightarrow$

$$a \equiv b \Rightarrow m|a - b \xrightarrow[n \text{ تعدی}]{n|m} n|a - b \Rightarrow a \equiv b$$

$$4x \equiv 17 \rightarrow 4x \equiv 2 \pmod{25} \rightarrow 4x \equiv 2 + 10 \pmod{25} \Rightarrow 4x \equiv 12 \xrightarrow{(4,25)=1} x \equiv 3 \pmod{25}$$

$$\Rightarrow x = 25k + 3 \pmod{25} \quad (\text{صفحه: } 25)$$

$$38x + 34y = 120 \xrightarrow{\div 2} 19x + 17y = 60.$$

جواب $(38, 34) = 2 | 120$.

معادله را به پیمانه‌ی ۱۷ می‌بریم:

$$\cancel{19}x + \cancel{17}y \equiv 60 : 2x \equiv 60 \xrightarrow{\div 2} x \equiv 30 \equiv -4 : x = 17q - 4 \xrightarrow{\text{جاگذاری}} y = -19q + 8$$

$$60 = \text{تعداد ربالی } x : 60x + 90y = 870 \xrightarrow{\div 30} 2x + 3y = 19$$

$$90 = \text{تعداد ربالی } y : (60, 90) = 30 | 870.$$

به پیمانه‌ی ۲ می‌رویم:

$$\cancel{2}x + \cancel{3}y \equiv 19 : y \equiv 1 \rightarrow y = 2k + 1 \geq 0 : k \geq -\frac{1}{2} \xrightarrow{\text{اشتراک}} k = \begin{cases} 0 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{جاگذاری}} x = -3k + 8 \geq 0 : k \leq \frac{8}{3}$$

$$k = 0 : \begin{cases} x = 8 \\ y = 1 \end{cases} \quad k = 1 : \begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases} \quad k = 2 : \begin{cases} x = 2 \\ y = 5 \end{cases}$$

(د)

(ج) درست (ص ۲۵)

(ب) نادرست (ص ۱۱)

(الف) نادرست (ص ۵)

درست (ص ۱۳)

$$15x \equiv 7 \Rightarrow 15x \equiv 25 \xrightarrow{(15,19)=1} x \equiv 3 \pmod{19} \Rightarrow x = 19k + 3$$

$$\xrightarrow{k=0} x = 98 \quad (\text{ص } 28)$$

$$5x + 3y = 42 \Rightarrow 5x \equiv 42 \equiv 2 \pmod{19} \Rightarrow x \equiv 8 \pmod{19} \Rightarrow x = 19k + 8 \Rightarrow 5(19k + 8) + 3y = 42 \Rightarrow y = -5k + 14$$

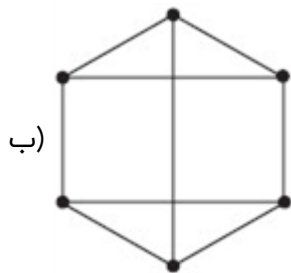
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 8 \\ y = 14 \end{cases} ; \begin{cases} x = 27 \\ y = 9 \end{cases} ; \begin{cases} x = 46 \\ y = 4 \end{cases} \quad (\text{ص } 28)$$

۴۱

$$\text{الف) } 3p = 2q \Rightarrow q = \frac{3p}{2}$$

$$\frac{3p}{2} + 6 = \binom{p}{2} \Rightarrow \frac{3p}{2} + 6 = \frac{p(p-1)}{2} \Rightarrow 3p + 12 = p^2 - p \Rightarrow p^2 - 4p - 12 = 0$$

$$\Rightarrow (p-6)(p+2) = 0 \Rightarrow p = 6 \Rightarrow q = 9$$



$$\text{الف) } p = 7, q = 6 \text{ (ص ۳۵)}$$

$$\text{ب) } 2q = 12 \text{ (ص ۳۹)}$$

$$\text{ج) } N_G[c] = \{a, c, d, e\} \text{ (ص ۳۶)}$$

$$\text{د) } a c e f a \text{ (ص ۳۸)}$$

$$\text{ه) } q(\bar{G}) + d_{\bar{G}}(g) = 15 + 6 = 21 \text{ (ص ۳۸)}$$

$$-k \text{ (د)}$$

$$\text{ج) } p - 1 \text{ (ص ۴۲)}$$

$$\text{ب) زوج (ص ۴۰)}$$

$$\text{الف) همبند (ص ۳۹)}$$

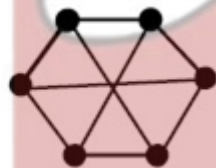
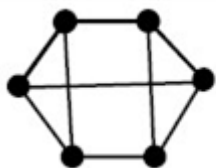
$$\text{منتظم (ص ۳۵)}$$

۴۲ فرض کنیم G یک گراف و A مجموعه همه رئوس فرد گراف و B مجموعه همه رئوس زوج گراف G باشد، در این صورت داریم:

از طرفی [خطای پردازش ریاضی] و [خطای پردازش ریاضی] زوج اند. لذا [خطای پردازش ریاضی] باید زوج باشد. می دانیم تعداد زوج عدد فرد، حاصل زوج را تولید می کنند بنابراین تعداد اعضای A باید زوج باشد. (ص ۴۰)

$$\deg_G(v) + \deg_{\bar{G}}(v) = p - 1 \Rightarrow 9 + 12 = p - 1 \Rightarrow p = 22 \text{ (مساله ۱ ص ۳۸)}$$

$$q = 2p - 3 \Rightarrow \frac{3p}{2} = 2p - 3 \Rightarrow p = 6 \text{ (ص ۴۲)}$$



به یکی از دو گراف زیر داده شود.

۴۷ فرض کنید G یک گراف کامل مرتبه p و اندازه q باشد.

$$q = \frac{p(p-1)}{2} \text{ و } p = \frac{1}{3}q \Rightarrow p = \frac{p(p-1)}{6} \Rightarrow p^2 - 7p = 0 \Rightarrow p = 7 \Rightarrow q = 21$$

$$pr = 2q \Rightarrow 5p = 2q, 2q - 3p = 12 \Rightarrow 5p - 3p = 12 \Rightarrow p = 6, q = 15$$

درجه	تعداد
x	۲
y	۳
v	

$$\rightarrow x + y = v \quad \textcircled{I}$$

۴۹

$$\sum \deg(V_i) = 2q \Rightarrow 2x + 3y = 18 \quad \textcircled{II}$$

$$\Rightarrow \textcircled{I} \text{ و } \textcircled{II} \Rightarrow \begin{cases} x + y = v \\ 2x + 3y = 18 \end{cases} : x = 3, y = 3$$

الف) $\gamma(G) \geq \frac{p}{\Delta + 1} \Rightarrow \gamma(G) \geq 3 \quad (*)$ (ص ۴۹)

۵۰

$\gamma(G) = 3$ از طرفی $A = \{a, e, f\}$ یک مجموعه احاطه‌گر است بنابه رابطه (*): پس:

ب) $B = \{a, d, g, h, i, j, k, l\}$

به هر مجموعه احاطه‌گر هشت عضوی مینیمال دیگر نمره تعلق گیرد. (ص ۴۶)

ج) $C = \{a, e, f, b\}$

به هر مجموعه احاطه‌گر چهار عضوی غیرمینیمال دیگر نمره تعلق گیرد. (ص ۴۷)

الف) می‌دانیم $\frac{n}{\Delta + 1} \leq \gamma(G)$ پس داریم $\frac{18}{5 + 1} \leq \gamma(G)$ در نتیجه $3 \leq \gamma(G)$

۵۱

از طرفی مجموعه‌ای مانند $\{e, c\}$ (هر کدام از مجموعه‌های $\{e, b\}$ یا $\{e, d\}$ اگر نوشته شد نیز مورد قبول است) یک

مجموعه احاطه‌گر برای گراف (G) می‌باشد پس $\gamma(G) \leq 2$ بنابراین $\gamma(G) = 2$

ب) ۳ (ص ۵۰)

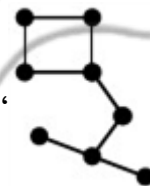
۵۲ برای گراف مورد سوال داریم $3 \leq \gamma(G) \Rightarrow \frac{10}{3 + 1} = 2.5 \leq \gamma(G)$ از طرفی مجموعه $\{g, h, d\}$ یک مجموعه

۵۲

احاطه‌گر برای گراف است. لذا $\gamma(G) \leq 3$. بنابراین $\gamma(G) = 3$. (قسمت دوم کار در کلاس ص ۵۰)

۵۳ الف) برای مثال اگر $n = 10$ ، رسم C_1 یا P_1 در این گراف‌ها: $\gamma(G) = \left\lfloor \frac{n}{\Delta + 1} \right\rfloor$. (ص ۴۹)

ب) در گرافی مشابه $\left\lfloor \frac{n}{\Delta + 1} \right\rfloor$ ولی $\gamma(G) = 3$. (ص ۵۰)



۵۴ زمانی که $\gamma = 1$ باشد یعنی حداقل یک رأس از درجه $p - 1$ داریم پس چون $p = 5 \leftarrow \Delta = 4$

۵۴

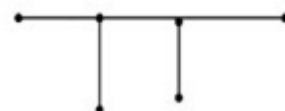
حداقل یال $\Delta = 4 \rightarrow$ $q = 4$

حداکثر یال $\Delta = 4 \rightarrow k_5 \rightarrow q = \binom{5}{2} = 10$

(۰/۵) (صفحه: ۵۳)



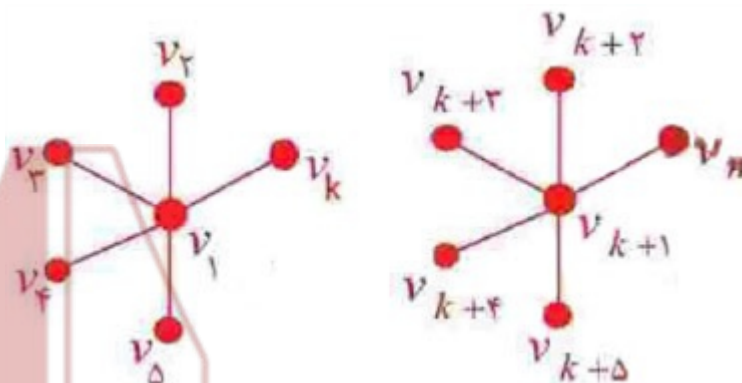
ب)



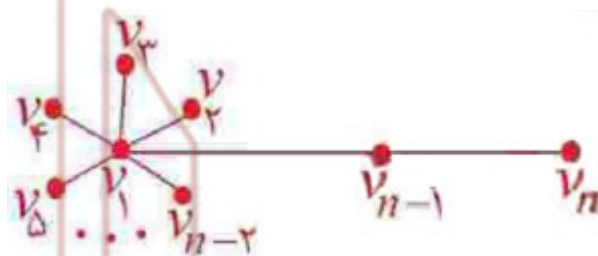
الف) (۰/۵)

۵۵

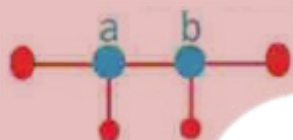
الف) کافیسست مطابق شکل زیر، یک گراف دو بخشی رسم کنیم به طوری که یک بخش آن شامل k راس و بخش دیگر آن شامل $n - k$ راس باشد.



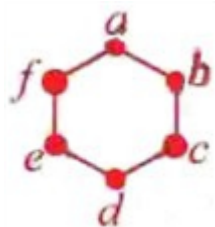
ب) مطابق شکل زیر باید گراف را رسم کرد که دو مجموعه‌ی احاطه‌گری آن $\{V_1, V_{n-1}\}$ و $\{V_1, V_n\}$ می‌باشند.



الف) مجموعه‌ی احاطه‌گری آن $\{a, b\}$ است.



ب) گراف مقابل دارای سه مجموعه‌ی احاطه‌گری به اندازه ۲ می‌باشد که عبارتند از:



$\{e, b\}, \{f, c\}, \{a, d\}$

با توجه به این که در هر دو، حداکثر درجه رئوس ۲ می‌باشد داریم:

$$\chi(P_n) = \chi(C_n) = \frac{n}{2+1} = \frac{n}{3}$$

$$\text{الف) } \gamma(G) \geq \frac{8}{3+1} = 2$$

مجموعه $\{a, g\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گری برای آن است. پس $\gamma(G) = 2$

$$\text{ب) } \gamma(G) \geq \frac{10}{4+1} = 2$$

مجموعه $\{e, j\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گری برای آن است. پس $\gamma(G) = 2$

$$\text{پ) } \gamma(G) \geq \frac{12}{5+1} = 2$$

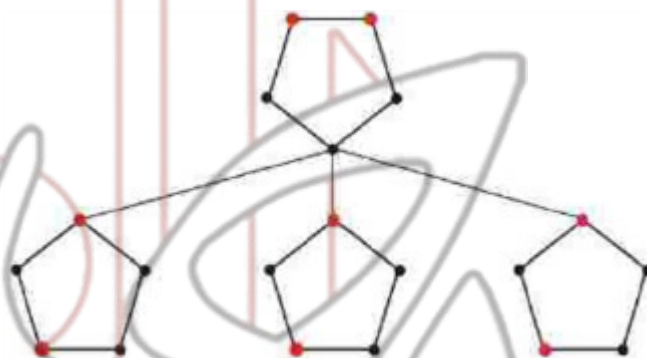
مجموعه $\{f, d, l\}$ یک مجموعه‌ی احاطه‌گری برای آن است. پس $\gamma(G) = 3$

$$\text{ت) } \gamma(G) \geq \frac{19}{5+1} = 3$$

از طرفی از هر مثلث حداقل یک رأس باید انتخاب کنیم، به عنوان نمونه مجموعه $\{f, i, k, l, e\}$ یک مجموعه احاطه‌گری آن است. بنابراین: $\gamma(G) = 5$

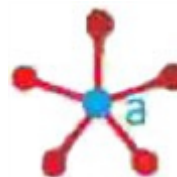
$$\text{ث) } \gamma(G) \geq \frac{20}{5+1} = 3$$

از طرفی از هر پنج ضلعی حداقل دو رأس باید انتخاب کنیم، لذا $2 \times 5 = 10$ یعنی $\gamma(G) = 8$ به عنوان نمونه رؤس قرمز رنگ به عنوان یک مجموعه احاطه‌گری محسوب می‌شوند.

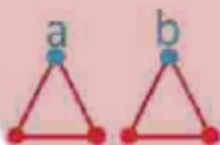


$$\begin{cases} q = \frac{kn}{r} \Rightarrow q = \frac{8 \times 2}{2} = 12 \\ q = \frac{n(n-1)}{r} \Rightarrow q = \frac{8 \times 7}{2} = 28 \end{cases} \Rightarrow 28 - 12 = 16 \text{ (ص ۴۰)}$$

مجموعه احاطه‌گری آن $\{a\}$ است.



ب) در گراف مقابل مجموعه احاطه‌گری $\{a, b\}$ است.

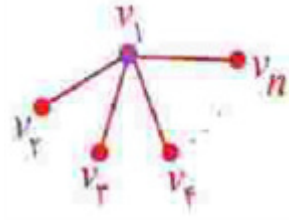


پ) کافیت گراف را به صورت k بخشی رسم کنیم و در هر بخش راسی که همه‌ی رؤس آن بخش را احاطه می‌کند در نظر بگیریم.

۶۲

حداقل یک راس با ماکزیمم درجه (راس فول) وجود دارد.

با فرض این که گراف دارای n راس باشد، حداقل باید $n - 1$ یال داشته باشد که می توان شکل مقابل را برای آن پیشنهاد



کرد:

حداکثر میزان تعداد یال $\frac{n(n-1)}{2}$ می باشد (حالتی که گراف کامل باشد). در هر صورت $\Delta(G) = n - 1$ است.

۶۳

الف) ۵ نفر را به عنوان ۵ راس یک گراف جهت دار در نظر می گیریم.

به طور مثال اگر نام علی در فهرست دوستان سامان وجود دارد، یک یال جهت دار از علی به سمت سامان رسم می کنیم. و برعکس اگر نام سامان در فهرست دوستان علی باشد یک یال جهت دار از سامان به علی رسم می کنیم. به همین ترتیب الی آخر پیش می رویم.

حداکثر تعداد یال ها در گراف جهت دار ۵ راسی $p(p-1) = 5 \times 4 = 20$ می باشد.

از طرفی برای هر یال دو حالت داریم (وجود داشتن یا وجود نداشتن آن یال) پس تعداد کل حالات برای آن 2^{20} می باشد. (ب) این قسمت هم چون قسمت الف است. با این تفاوت که گراف جهت دار نیست. پس حداکثر تعداد یال ها

می باشد. بنابراین تعداد کل حالات 2^{10} است. $\frac{p(p-1)}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$

۶۴

الف) $4! \times 6!$

ب) $5! \times 4!$

ج) $3! \times 7!$ (ص ۷۲)

۶۵

الف) چیدن ۹ کتاب بدون هیچ محدودیت به $9!$ طریق امکان پذیر است.

ب) ۴ کتاب فیزیک را به عنوان یک پک کتاب که به همراه ۵ کتاب ریاضی، ۶ شیء محسوب می شود و تعداد جایگشت آن ها $6!$ خواهد بود. از طرفی ۴ کتاب فیزیک به تعداد $4!$ طریق با هم امکان جابه جایی دارند. لذا طبق اصل ضرب، جواب مسئله $6! \times 4!$ است.

پ) باید کتاب ها بنا به موضوع یکی در میان چیده شوند: RFRFRFRFR

لذا برای ریاضی ها $5!$ و برای فیزیک ها $4!$ حالت داریم و طبق اصل ضرب در کل $5! \times 4!$ روش امکان پذیر است.

ت) کتاب های خاص را به عنوان یک پک ۳ تایی که به $3!$ طریق کنار هم قرار می گیرند در نظر می گیریم.

از طرفی یک پک به همراه ۶ کتاب باقی مانده را به $7!$ طریق می توان کنار هم چید.

در نتیجه بنا به اصل ضرب به $3! \times 7!$ روش امکان پذیر است.

۶۶

تعداد حالات انتخاب ۲ رقم از ۴ رقم مجموعه A برابر است با: $\binom{4}{2}$

تعداد حالات انتخاب ۳ رقم از ۵ رقم مجموعه B برابر است با: $\binom{5}{3}$

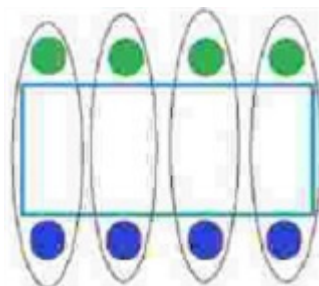
از طرفی تعداد حالات چینش ۵ رقم به صورت یک کد ۵ رقمی برابر $5!$ می باشد، لذا طبق اصل ضرب جواب مسئله

است. $\binom{4}{2} \times \binom{5}{3} \times 5!$

۶۷

مسئله را به این صورت بیان می‌کنیم که:

مطابق شکل دور یک میز ۴ جفت صندلی روبه‌روی هم داریم که می‌خواهیم ۴ جفت برادر را روی آن‌ها بنشانیم. طبق اصل شمارش این عمل به ۴! حالت امکان‌پذیر است. از طرفی برای هر جفت صندلی که دو برادر می‌خواهند روی آن بنشینند ۲ حالت داریم (کدام برادر روی صندلی آبی و کدام روی صندلی سبز بنشیند) و با وجود ۴ صندلی طبق اصل شمارش باید ۴! در ۲ ضرب شود. بنابراین جواب مسئله $۲^۴ \times ۴!$ است.



۶۸

به هر کدام از $x_1, x_2, \dots, x_k$ عدد ۱- را اضافه می‌کنیم.

$$(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_k - 1) = n - k$$

معادله جدید $(x_1 - 1) + (x_2 - 1) + \dots + (x_k - 1) = n - k$ به دست می‌آید. (ص ۶۱)

لذا تعداد حالات جواب از رابطه $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n-k+k-1}{k-1}$ به دست می‌آید. (ص ۶۱)

$$x_1 + x_2 + x_3 = 8 \quad (\text{ص ۶۱})$$

$$x_2 - 3 = y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 + y_2 = 5 \Rightarrow \binom{5}{2} = 10$$

$$\begin{cases} x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 10 \Rightarrow \binom{10}{2} = 45 \\ x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 = 8 \Rightarrow \binom{8}{2} = 28 \end{cases} \Rightarrow 45 + 28 = 73 \quad (\text{ص ۷۱})$$

$$x_2 = 4, x_3 \geq 3 \Rightarrow x_3 = y_3 + 3$$

$$x_1 + x_2 + 4 + x_3 + 3 + y_3 + x_4 = 12 \Rightarrow x_1 + x_2 + x_3 + y_3 + x_4 = 5 \Rightarrow z = \binom{5}{4} \quad (\text{ص ۷۱})$$

۶۹

۷۰

۷۱

$$0 \leq x_1 - 6 < 3; y_1 = x_1 - 6 \Rightarrow x_1 = y_1 + 6, 0 \leq y_1 < 3$$

$$0 \leq x_2 - 5 < 5; y_2 = x_2 - 5 \Rightarrow x_2 = y_2 + 5, 0 \leq y_2 < 5$$

$$\Rightarrow y_1 + 6 + y_2 + 5 + x_3 = 25 \Rightarrow y_1 + y_2 + x_3 = 14 (*)$$

$$|A_1| : \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی } (*) \text{ با شرط : } \binom{13}{2}$$

$$y_1 \geq 3$$

$$|A_2| : \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی } (*) \text{ با شرط : } \binom{11}{2}$$

$$y_2 \geq 5$$

$$|S| : \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی } (*) \text{ با شرط : } \binom{16}{2}$$

معادله *

$$|A_1 \cap A_2| : \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی } (*) \text{ با شرط : } \binom{8}{2}$$

$$\text{شرط } y_1 \geq 3, y_2 \geq 5$$

$$|A'_1 \cap A'_2| = |(A_1 \cup A_2)'| = |S| - |(A_1 \cup A_2)| = \binom{16}{2} - \binom{13}{2} - \binom{11}{2} + \binom{8}{2} =$$

$$120 - 78 - 55 + 28 = 15$$

آنچه مسلم است جمع درایه‌های هر سطر یا ستون یا قطر اصلی باید ۱۵ باشد پس:

a	b	c
d	e	f
g	h	m

$$a + e + m = 15$$

$$c + e + g = 15$$

$$b + e + h = 15$$

$$(a + b + c) + 3e + (m + g + h) = 45$$

$$\Rightarrow 3e = 15 \Rightarrow e = 5$$

توجه: مجموع درایه‌های هر سطر یا ستون در مربع $n \times n$ برابر $\frac{n(n^2 + 1)}{2}$ می‌باشد.

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 16$$

$$x_3 = 3$$

$$x_4 \geq 3, x_5 \geq 5 \xrightarrow{x_3=3, x_4=y_4+3, x_5=y_5+5} x_1 + x_2 + 3 + y_4 + 3 + y_5 = 5$$

$$x_i \geq 0, y_5 \geq 0 \Rightarrow \binom{5+3-1}{3-1} = 56 \text{ (ص ۷۱)}$$

	a	b	c
شنبه	۱	۲	۳
یکشنبه	۳	۱	۲
دوشنبه	۲	۳	۱

	a	b	c
شنبه	۱	۳	۲
یکشنبه	۳	۲	۱
دوشنبه	۲	۱	۳

	a	b	c
شنبه	۱۱	۲۳	۳۲
یکشنبه	۳۳	۱۲	۲۱
دوشنبه	۲۲	۳۱	۱۳

(ص ۷۲)

اگر مربع‌های لاتین متعامد صحیح دیگری نیز بتوانید به دست آورید، درست است.

۲	۳	۱
۳	۱	۲
۱	۲	۳

۳	۱	۲
۲	۳	۱
۱	۲	۳

هر کدام از مربع‌های لاتین (ص ۶۴ و ۶۵)

۷۷ ۱۵، چون اعداد ۱ تا ۵ در هر سطر می‌چنینیم پس مجموع درایه‌ها برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

۷۸ $k + 1 = 3 \Rightarrow k = 2, n = 3 \times 4 = 12 \Rightarrow kn + 1 = 12 \times 2 + 1 = 25$ (ص ۸۲)

۷۹ $|A| = \left[\frac{500}{5} \right] = 100, |B| = \left[\frac{500}{4} \right] = 125, |A \cap B| = \left[\frac{500}{20} \right] = 25$
 (ص ۷۵) $|\overline{A} \cap \overline{B}| = |\overline{A \cup B}| = 500 - (100 + 125 - 25) = 300$

(ص ۷۵) $|S| = 5^4$: تعداد کل رمزا

$|A| = 4^4$: تعداد رمزهای فاقد ۳

$|B| = 4^4$: تعداد رمزهای فاقد ۲

$|A \cap B| = 3^4$: تعداد رمزهای فاقد ۲ و ۳

$|\overline{A} \cap \overline{B}| = |S| - |A \cup B| = 5^4 - (4^4 + 4^4 - 3^4)$

۸۱ این سؤال معادل با پیدا کردن تعداد توابع پوشایی است که از مجموعه ۵ عضوی به یک مجموعه ۳ عضو می‌توان نوشت. (ص ۷۸)

$$3^5 - (3 \times 2^5 - 3) = 243 - 93 = 150$$

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 10$

$x_3 \geq 4 \Rightarrow y_3 = x_3 - 4, y_3 \geq 0$

$x_6 > 2 \Rightarrow y_6 = x_6 - 3, y_6 \geq 0$

$x_1 + x_2 + y_3 + 4 + x_4 + x_5 + y_6 + 3 = 10$

$\Rightarrow x_1 + x_2 + y_3 + x_4 + x_5 + y_6 = 3 \Rightarrow z = \binom{8}{5}$ (ص ۷۱)

$A = \{n \in S | n = 5k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(A) = \left[\frac{400}{5} \right] = 80$

$B = \{n \in S | n = 7k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(B) = \left[\frac{400}{7} \right] = 57$

$A \cap B = \{n \in S | n = 35k, k \in \mathbb{Z}\} \Rightarrow n(A \cap B) = \left[\frac{400}{35} \right] = 11$

(ص ۷۵) $|\overline{A \cup B}| = |S| - |A \cup B| = 400 - (80 + 57 - 11) = 274$

(ص ۷۴) $|\overline{F \cup V}| = |S| - |F \cup V| = 25 - (15 + 14 - 9) = 5$

$$\text{حالات انتخاب نفرات برای هر کتاب: } \begin{matrix} \textcircled{۸} & \textcircled{۷} & \textcircled{۶} & \textcircled{۵} & \textcircled{۴} \end{matrix} \xrightarrow{\times} \frac{۸!}{۳!}$$

کتاب ۵ کتاب ۴ کتاب ۳ کتاب ۲ کتاب ۱

روش دوم: تعداد حالت‌های ممکن برابر است با تعداد توابع یک به یک از مجموعه‌ای ۵ عضوی به یک مجموعه‌ی ۸ عضوی: $(۸)_۵ = \frac{۸!}{۳!}$

۸۶ می‌خواهیم با ارقام ۹ و ۸ و ۷ و ۶ و ۵ و ۴ و ۳ و ۲ و ۱ رمزهای ۵ رقمی بسازیم که شامل حداقل یک رقم ۲ و یک رقم ۳ و یک رقم ۷ باشند. بدون در نظر گرفتن شرط وجود حداقل یک رقم اعداد گفته شده یعنی در حالت کلی $۹^۵$ رمز می‌توان ساخت. به عبارت دیگر: $|S| = ۹^۵$. مجموعه‌ی رمزهای فاقد رقم ۲ را با A و مجموعه‌ی رمزهای فاقد رقم ۳ را با B و مجموعه‌ی رمزهای فاقد رقم ۷ را با C نمایش می‌دهیم. بنابراین:

$$|A| = |B| = |C| = ۸^۵, |A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = ۷^۵, |A \cap B \cap C| = ۶^۵$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cup B \cup C| = ۳ \times ۸^۵ - ۳ \times ۷^۵ + ۶^۵ \Rightarrow |\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}|$$

$$= |S| - |A \cup B \cup C| = ۹^۵ - (۳ \times ۸^۵ - ۳ \times ۷^۵ + ۶^۵) = ۳۳۹۰.$$

حال در صورتی که امتحان کردن هر ۵ رقمی ۶ ثانیه طول بکشد، حداکثر $۳۳۹۰ \times ۶ = ۲۰۳۴۰$ ثانیه معادل ۵ ساعت ۳۹ دقیقه وقت لازم است.

$$\text{الف)} |F| = ۱۵, |V| = ۱۱, |B| = ۹, |F \cap V| = ۵, |V \cap B| = ۶, |F \cap B| = ۳,$$

$$|F \cup V \cup B| = ۳۴ - ۱۰ = ۲۴$$

$$|F \cup V \cup B| = |F| + |V| + |B| - |F \cap V| - |V \cap B| - |B \cap F| + |F \cap V \cap B|$$

$$۲۴ = ۱۵ + ۱۱ + ۹ - ۵ - ۶ - ۳ + |F \cap V \cap B| \Rightarrow |F \cap V \cap B| = ۳$$

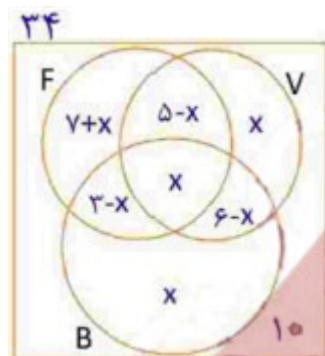
$$\text{ب)} |F| - |F \cap V| - |F \cap B| + |F \cap V \cap B| = ۱۵ - ۵ - ۳ + ۳ = ۱۰$$

$$\text{پ)} |V - B| = |V| - |V \cap B| = ۱۱ - ۶ = ۵$$

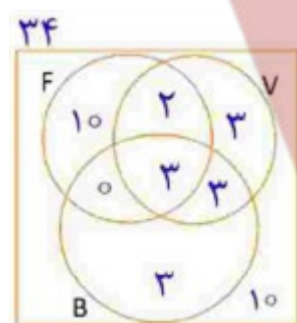
$$\left. \begin{aligned} \text{فقط فوتبال} &= |F| - |F \cap V| - |F \cap B| + |F \cap V \cap B| = ۱۵ - ۵ - ۳ + ۳ = ۱۰ \\ \text{فقط والیبال} &= |V| - |F \cap V| - |V \cap B| + |F \cap V \cap B| = ۱۱ - ۵ - ۶ + ۳ = ۳ \\ \text{فقط بسکتبال} &= |B| - |B \cap F| - |V \cap B| + |F \cap V \cap B| = ۹ - ۳ - ۶ + ۳ = ۳ \end{aligned} \right\} \quad \text{ت)}$$

$$\rightarrow ۱۶$$

روش ساده‌تر: پیشنهاد می‌شود برای حل این نوع سؤالات از نمودار ون به شکل زیر استفاده شود:



$$۷ + x + ۵ - x + x + ۳ - x + x + ۶ - x + x + ۱۰ = ۳۴ \Rightarrow x = ۳$$



$$\text{الف)} ۳$$

$$\text{ب)} ۱۰$$

$$\text{پ)} ۳ + ۲ = ۵$$

$$\text{ت)} ۱۰ + ۳ + ۳ = ۱۶$$

بنابراین می‌توان نمودار ون را به شکل زیر بازنویسی کرد:

الف) $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 10 \quad x_i > 0, 2 \leq i \leq 5$

$$\xrightarrow{2 \leq i \leq 5} x_i > 0 \Rightarrow \underbrace{x_i}_{y_i} \geq 1 \Rightarrow x_i - 1 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x_i = y_i + 1}$$

$$\Rightarrow x_1 + y_2 + 1 + y_3 + 1 + y_4 + 1 + y_5 + 1 = 10$$

$$\Rightarrow x_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 6 \Rightarrow \binom{6+5-1}{5-1} = \binom{10}{4}$$

ب) $x_1 + x_2 + \dots + x_6 = 12 \quad x_1 > 2, x_5 \geq 4$

$$x_1 > 2 \Rightarrow x_1 \geq 3 \Rightarrow \underbrace{x_1}_{y_1} - 3 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = y_1 + 3}$$

$$x_5 \geq 4 \Rightarrow \underbrace{x_5}_{y_5} - 4 \geq 0 \Rightarrow \boxed{x_5 = y_5 + 4}$$

$$\Rightarrow y_1 + 3 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + 4 + x_6 = 12 \Rightarrow y_1 + x_2 + x_3 + x_4 + y_5 + x_6 = 5$$

$$\Rightarrow \binom{5+6-1}{6-1} = \binom{10}{5}$$

پ) $x_1 + x_2 + \dots + x_5 = 11 \quad x_i \geq 1, 1 \leq i \leq 5$

$$\binom{11-1}{5-1} = \binom{10}{4}$$

ت) $x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \quad x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$

طبق شرط مسئله، باید تعداد جواب‌های صحیح و مثبت (طبیعی) را محاسبه کنیم که برابر است با:

بدیهی است که با توجه به ضریب x_2 ، برای آن ۳ حالت می‌توان در نظر گرفت:

حالت اول: $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 7$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{7+3-1}{3-1} = \binom{9}{2} = 36$$

حالت دوم: $x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 5$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$$

حالت سوم: $x_2 = 2 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 3$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

$$36 + 21 + 10 = 67$$

ث) $x_1 + \sqrt{x_2} + x_3 + x_4 = 3 \quad x_i \geq 0, 1 \leq i \leq 4$

با توجه به شرایط معادله چهار حالت برای x_2 وجود دارد:

حالت اول: $x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 3$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10$$

حالت دوم: $x_2 = 1 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 2$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{2+3-1}{3-1} = \binom{4}{2} = 6$$

حالت سوم: $x_2 = 4 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 1$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$$

حالت چهارم: $x_2 = 9 \Rightarrow x_1 + x_3 + x_4 = 0$

$$\Rightarrow \text{تعداد جواب های صحیح نامنفی} = \binom{3-1}{2} = \binom{2}{2} = 1$$

بنابراین تعداد جواب های صحیح نامنفی معادله برابر است با: $1 + 6 + 3 + 1 = 20$

تعداد حالت های ممکن برای انجام این عمل معادل است با پیدا کردن تعداد تابع های پوشا از یک مجموعه ی ۴ عضوی

۸۹

مانند A به یک مجموعه ی ۳ عضوی مانند B.

$$A_i = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, i = 1, 2, 3, 4, j = 1, 2, 3\} \quad (./25)$$

$$|S| = |B|^{|A|} = 3^4 = 81 \quad (./25), |A_1| = |A_2| = |A_3| = 2^4 = 16 \quad (./25)$$

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1 \cap A_3| = |A_2 \cap A_3| = 1 \quad (./25), |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0 \quad (./25),$$

$$|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \overline{A_3}| = |\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$(./25)$$

$$(./25)$$

$$= 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36$$

(ص ۷۸ و ۷۹)

$$(./25)$$

اعداد مجموعه ی A در ۴۲ قفس به شکل زیر افراز می کنیم:

۹۰

$$\{1, 84\}, \{2, 83\}, \{3, 82\}, \dots, \{42, 43\}$$

قفس ها را به عنوان لانه ها و اعداد درون آن ها را کبوتر در نظر می گیریم، به طوری که می خواهیم از این لانه ها ۴۳ کبوتر به عنوان یک زیرمجموعه ی ۴۳ عضوی انتخاب کنیم.

طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر از یک لانه برداشته خواهند شد، یعنی حداقل دو عدد در زیرمجموعه وجود دارند که مجموع آن ها ۸۵ است.

می دانیم باقیمانده تقسیم هر عدد طبیعی بر ۲، برابر ۰ یا ۱ می باشد.

۹۱

اگر سه عدد طبیعی را به عنوان کبوترها و باقی مانده تقسیم اعداد طبیعی بر ۲ (یعنی ۰ و ۱) را به عنوان ۲ لانه در نظر بگیریم، طبق اصل لانه کبوتری، حداقل دو کبوتر در یک لانه جای خواهند گرفت، یعنی حداقل دو عدد طبیعی از بین اعداد انتخابی، باقیمانده یکسان در تقسیم بر ۲ دارند.

حال این دو عدد که باقیمانده یکسان دارند، هر دو فرد یا هر دو زوج خواهند بود که در هر صورت مجموعشان عددی زوج است.

$$1 \leq j \leq 3 \quad A_j = \{f : A \rightarrow B \mid f(a_i) \neq b_j, 1 \leq i \leq 4\}$$

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}, B = \{b_1, b_2, b_3\}$$

$$|S| = 3^4, |A_i| = 2^4, |A_i \cap A_j| = 1^4, |A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 0$$

$$|\overline{A_1 \cup A_2 \cup A_3}| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| = 81 - (3 \times 16 - 3 \times 1 + 0) = 36 \quad (ص ۷۷)$$

۹۲

تعداد این حالت ها برابر است با تعداد توابع پوشا از یک مجموعه ی ۶ عضوی به یک مجموعه ی ۳ عضوی.

۹۳

با فرض $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ و $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$ ، تعداد توابع پوشا از X به Y را محاسبه

می کنیم: $S \Rightarrow |S| = 3^6$ مجموعه ی تمام توابع قابل ساخت از X به Y

$$A \Rightarrow |A| = 2^6 \quad \text{مجموعه ی تمام توابعی که برد آن ها } \{y_2, y_3\} \text{ می باشد (بُرد فاقد عضو } y_1 \text{ است).}$$

$$B \Rightarrow |B| = 2^6 \quad \text{مجموعه ی تمام توابعی که برد آن ها } \{y_1, y_2\} \text{ می باشد. (بُرد فاقد عضو } y_3 \text{ است).}$$

$$C \Rightarrow |C| = 2^6 \quad \text{مجموعه ی تمام توابعی که برد آن ها } \{y_1, y_3\} \text{ می باشد (بُرد فاقد عضو } y_2 \text{ است).}$$

$$\Rightarrow |A \cap B| = |B \cap C| = |C \cap A| = 1, |A \cap B \cap C| = 0$$

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cup B \cup C| = 3 \times 2^6 - 3 \times 1 + 0 \Rightarrow |\overline{A \cap B \cap C}| = |\overline{A \cup B \cup C}|$$

$$= |S| - |A \cup B \cup C| = 3^6 - (3 \times 2^6 - 3 \times 1 + 0) = 54.$$

۹۴

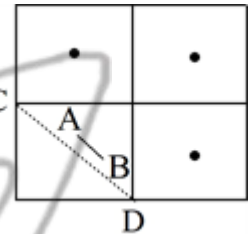
چون حرف اول نام ۳۲ حرف و حرف اول نام خانوادگی نیز ۳۲ حرف می‌تواند باشد، تعداد لانه‌ها برابر $۳۲ \times ۳۲ = ۱۰۲۴$ است. (۰/۲۵) از طرفی تعداد شرکت‌کنندگان (کبوتر) برابر ۳۰۷۳ (۰/۲۵) است. طبق اصل لانه کبوتری $۱ + ۳ = ۴$ حداقل ۳۰۷۳ (۰/۲۵)، شرکت‌کننده وجود دارند که حرف اول نام و نام خانوادگی آن‌ها یکی است. (۰/۲۵) صفحه ۳۰

۹۵

می‌دانیم مجموعه باقی‌مانده‌های هر عدد طبیعی بر ۳۹ به صورت $\{۰, ۱, ۲, \dots, ۳۸\}$ است. (۰/۲۵) اگر اعضای S (۴۰ نفر) را تعداد کبوترها و تعداد باقی‌مانده (۳۹) را لانه کبوترها در نظر بگیریم. (۴۰ > ۳۹) (۰/۵) طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو عضو از این مجموعه وجود دارد که دارای باقی‌مانده یکسانی بر ۳۹ است. (۰/۲۵)

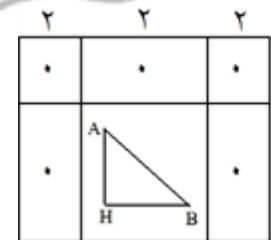
۹۶

۵ نقطه: ۵ کبوتر
۴ مربع کوچک به ضلع ۱ واحد: ۴ لانه (۰/۲۵) $۵ > ۴$
ابتدا سطح مربع را به ۴ مربع مساوی به ضلع ۱ واحد تقسیم می‌کنیم (مطابق شکل روبه‌رو) بنابر اصل لانه‌ی کبوتری و روابط بالا حداقل دو نقطه درون یکی از مربع‌های کوچک واقع می‌شوند، داریم: (رسم شکل (۰/۲۵))
 $CD^2 = 1^2 + 1^2 = 2 \rightarrow CD = \sqrt{2}$ (۰/۲۵)
می‌دانیم فاصله ی دو نقطه درون مربع از قطر مربع کوچک‌تر است در نتیجه $AB < CD$ (۰/۲۵)



۹۷

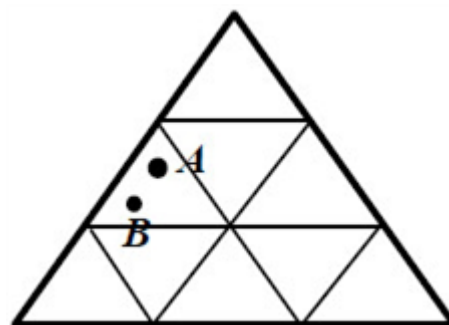
۶ = تعداد لانه‌ها (۰/۲۵)
۷ = تعداد کبوترها
بر طبق اصل لانه کبوتری حداقل ۲ نقطه درون یک مربع قرار می‌گیرند. (۰/۲۵)
 $AB^2 = AH^2 + BH^2 < 2^2 + 2^2 \Rightarrow AB^2 < 8 \Rightarrow AB < 2\sqrt{2}$ (۰/۲۵)



۹۸

$۵۰۰ = ۵^2 \times ۲^2$ $S = \{1, 2, \dots, ۵۰۰\} \Rightarrow |S| = ۵۰۰$
تعداد اعضای S که بر ۲ بخش پذیر است: $|A_1| = \left\lfloor \frac{۵۰۰}{۲} \right\rfloor = ۲۵۰$
تعداد اعضای S که بر ۵ بخش پذیر است: $|A_2| = \left\lfloor \frac{۵۰۰}{۵} \right\rfloor = ۱۰۰$
تعداد اعضای S که بر ۱۰ بخش پذیر است: $|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{۵۰۰}{۱۰} \right\rfloor = ۵۰$
 $|A_1' \cap A_2'| = |(A_1 \cup A_2)'| = |S| - |A_1 \cup A_2| = ۵۰۰ - (۲۵۰ + ۱۰۰ - ۵۰) = ۲۰۰$

۱۰ نقطه را کبوتر و هریک از ۹ قسمت مثلث را لانه فرض می‌کنیم. طبق اصل لانه کبوتری حداقل دو کبوتر در یک لانه جای می‌گیرند. یعنی حداقل دو نقطه در یک مثلث کوچک قرار خواهند گرفت به طوری که $|AB| < ۱$. (ص ۸۰)



	دوئل	یکتبه	شبه
A	۳	۲	۱
B	۲	۱	۳
C	۱	۳	۲

(۰/۵)

۹

	دوئل	یکتبه	شبه
A	۳	۱	۲
B	۲	۳	۱
C	۱	۲	۳

(۰/۵)



	دوئل	یکتبه	شبه
A	۳۳	۲۱	۱۲
B	۲۲	۱۳	۳۱
C	۱۱	۳۲	۲۳

(صفحه: ۶۹) (۰/۵)