نام و نام خانوادگی : **عنوان آزمون :** ۱۰۰ سوال هندسه ۳ کل کتاب

پایه تحصیلی : دوازدهم ریاضی

نام دبیر : عبدی

۱) به ازای چه مقادیری از m دستگاه معادلات $\begin{cases} -۴x + (m-۳)y = ۳ \\ ۲x - \frac{m-۳}{۲}y = ۱ \end{cases}$ یک جواب منحصر به فرد دارد؟

۲) اگر $A = [a_{ij}]_{۲\times۲}$ و $\left|A^{۳}\right| = -۸$ باشد، حاصل $\frac{\left|A^{-۱}\right|}{|۳A|}$ را بیابید.

۳) اگر $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} -۱ & |i-j| > ۱ \\ ۰ & |i-j| = ۱ \\ ۱ & |i-j| < ۱ \end{cases}$ باشد، ماتریس $A^{۲} - ۲I$ را به دست آورید.

۴) درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر A ماتریس اسکالر و B ماتریس هم‌مرتبه A باشد، آنگاه حاصلضرب آنها تعویض‌پذیر است.

ب) اگر $A = \begin{bmatrix} ۵ & -۲ \\ ۱۰ & -۴ \end{bmatrix}$ باشد آنگاه $A^{۱۴۰۳} = I$.

۵) روی جواب دستگاه $\begin{cases} \frac{x}{۲} = \frac{y}{۳} + ۱ \\ \frac{x}{۲} - \frac{y}{۲} = \frac{۵}{۲} \end{cases}$ بحث کرده و در صورتی‌که دارای جواب منحصر به فرد است، به روش ماتریس وارون آن را پیدا کنید.

۶) دترمینان ماتریس مقابل را به دست آورید. $A = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۴ & ۲ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} ۱ & ۵ \\ ۲ & ۱۱ \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} ۲ & -۳ \\ ۱ & ۵ \end{vmatrix} \end{bmatrix}$

۷) اگر $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۷ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ x & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = A + x\begin{vmatrix} ۲ & ۷ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix}$ باشد، مقدار A را به دست آورید.

۸) اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و $|A| = -۲$، حاصل $\left|A^{-۱}\right|^{۳} + |۲A|$ را محاسبه کنید.

۹) اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۲ & |A| \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $\left||A|\,A + A\right|$ را به دست آورید.

۱۰) در ماتریس، $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$، اگر $a_{ij} = \begin{cases} i-۲j & i>j \\ ۲ & i=j \\ i^{۲} & i<j \end{cases}$، مجموع درایه‌های ماتریس را به دست آورید.

۱۱) اگر $۳A = \begin{bmatrix} |A| & -۵ \\ ۱ & ۴|A| \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $\left|A^{-۱}\right|$ را محاسبه کنید.

۱۲) جای خالی را با واژه مناسب کامل کنید.

اگر $A = \begin{bmatrix} -\operatorname{Sin}\theta & \operatorname{Cos}\theta \\ \operatorname{Cos}\theta & \operatorname{Sin}\theta \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه دترمینان ماتریس A برابر .... است.

۱۳) اگر $A = \begin{bmatrix} |A| & ۰ & ۱ \\ ۱ & |A| & ۱ \\ ۰ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A|$ را بیابید.

۱۴) در تساوی ماتریسی $\begin{bmatrix} ۵ & ۲ \\ ۷ & ۳ \end{bmatrix} A = \begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$، ماتریس A را به دست آورید.

۱۵) ماتریس $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} ۱ & i = i \\ ۰ & i \neq j \end{cases}$ معرفی شده است، مقدار k را طوری پیدا کنید که رابطه $k\,|kA| = ۶۲۵$ برقرار باشد.

۱۶) اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۶ & ۲ \\ ۱ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}$، حاصل $\left|-\frac{۱}{۲}A^{۴}\right|$ را به دست آورید.

۱۷) اگر A و B دو ماتریس مربعی مرتبه ۳ و تعویض‌پذیر باشند، ثابت کنید:

$$(A-B)^{۲} = A^{۲} - ۲AB + B^{۲}$$

۱۸) اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & m+۱ \\ ۲n+۴ & ۵ \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، با محاسبه m و n ماتریس $A + I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است).

۱۹) درستی و نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در صورت نادرستی، شکل صحیح عبارت را بنویسید.

- اگر A یک ماتریس ۳×۳ و $|A| = ۵$ باشد آنگاه $|۲A| = ۴۰$ است.

۲۰) جاهای خالی را پر کنید.

الف) دترمینان ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲ & ۱ & -۱ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۰ & -۲ & ۴ \end{bmatrix}$ برابر .... است.

ب) از تساوی ماتریسی $A\times B = A\times C$ که در آن A یک ماتریس مربعی است، با شرط .... نتیجه می‌شود $B = C$.

۲۱) دو ماتریس ۳×۳ مانند A و B مثال بزنید که $A \neq \overline{O}$ و $B \neq \overline{O}$، ولی $AB = \overline{O}$ است.

۲۲) دستگاه $\begin{cases} ۳x - ۴y = ۱ \\ ۲y - x = ۱ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

۲۳ ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ که $a_{ij}=\begin{cases} j-1 & i>j \\ i^2-j & i=j \\ 1-i & i<j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند.

الف) حاصل $A\times B$ را به دست آورید.

ب) دترمینان ماتریس B را به دست آورید. (با روش دلخواه)

۲۴ جاهای خالی را با عبارت مناسب پر کنید.

الف) اگر $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$، ماتریسی اسکالر باشد و $a_{22}=4$ در این صورت $|A|$ برابر است ....

ب) اگر صفحه قاطع یک سطح مخروطی با مولد موازی و از رأس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک .... است.

۲۵ در معادله $\begin{vmatrix} 0 & x-3 & x-2 \\ x+3 & 0 & -4 \\ x+2 & 6 & 0 \end{vmatrix}=0$، مقدار x را به دست آورید.

۲۶ اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، حاصل ماتریس $A^{20}-A^{19}$، را مشخص کنید.

۲۷ اگر $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$، نشان دهید: $(5A)^{-1}=\frac{1}{5}A^{-1}$

۲۸ اگر A ماتریس ۳×۳ باشد، $|A|=4$ باشد، آن‌گاه حاصل $\left|A\,|A|\right|$ را به دست آورید.

۲۹ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر A و B دو ماتریس ۲×۲ باشند آن‌گاه: $|AB|=|A|\,|B|$

ب) در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی (l) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.

پ) در حالتی‌که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد بیضی تبدیل به یک پاره‌خط می‌شود.

ت) نقطه با مختصات $(-4,3,-2)$ در ناحیه (کنج) شماره ۵ محورهای مختصات سه بعدی واقع است.

۳۰ اگر $2A=\begin{bmatrix} |A| & -4 \\ 1 & |A| \end{bmatrix}$ باشد، در این صورت حاصل $\left|A^{-1}\right|$ را بیابید.

۳۱ دو ماتریس $A=\begin{bmatrix} 2 & m-2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ n+1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ m & 0 & n \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ مفروض‌اند، اگر A یک ماتریس قطری باشد، حاصل AB را محاسبه کنید.

۳۲ اگر $A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشند، حاصل $|A|+\left|B^2\right|$ را بیابید.

۳۳ روی وجود و عدم وجود و تعداد جواب‌های هریک از دستگاه‌های زیر بحث کنید و در صورت وجود، جواب را با استفاده از A^{-1} بیابید.

الف) $\begin{cases} 3x - 5y = -1 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$

ب) $\begin{cases} x + 3y = 5 \\ -2x - 6y = 1 \end{cases}$

پ) $\begin{cases} -2x + 3y = 2 \\ 4x - 6y = -4 \end{cases}$

۳۴ الف) ماتریس‌های $A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \mathrm{ka} & \mathrm{kb} & \mathrm{kc} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ $(k \in \mathrm{R})$ را درنظر بگیرید و $|A|$ و $|B|$ را از دستور ساروس محاسبه کرده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ب) قسمت الف را برای دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} \mathrm{ka} & \mathrm{kb} \\ c & d \end{bmatrix}$ $(k \in \mathrm{R})$ بررسی کنید.

۳۵ اگر $A = \begin{bmatrix} r_1 & 0 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 \\ 0 & 0 & r_3 \end{bmatrix}$ ماتریسی قطری باشد و B ماتریسی ۳×۳ و دلخواه باشد در این صورت ماتریس $(A \times B)$ را تشکیل دهید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۳۶ ماتریس $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ در تساوی $A^2 + \mathrm{mA} + \mathrm{nI}_2 = \bar{o}$ صدق می‌کند حاصل $m + n$ را بیابید.

۳۷ دستگاه $\begin{cases} 3\mathrm{x} - 4\mathrm{y} - 13 = 0 \\ y + 2\mathrm{x} - 5 = 0 \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس معکوس حل کنید.

۳۸ اگر $A = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$، آن‌گاه حاصل عبارت $(A^{-1} + I)^{-1}$ را به‌دست آورید.

۳۹ اگر $\begin{vmatrix} 1 & b & a+1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$ باشد، مقدار $\begin{vmatrix} 1 & b & a \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ را بیابید.

۴۰ اگر $A = [1 \ 2 \ -3]$ و $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ در این صورت $|\mathrm{AB}|$ و $|\mathrm{BA}|$ را به دست آورید.

۴۱ دو بردار $\vec{a} = (-m, -1, -2)$ و $\vec{b} = (0, -3, m+2)$ مفروض‌اند. اگر دو بردار $\vec{a} - \vec{b}$ و $\vec{a} + \vec{b}$ بر هم عمود باشند، آنگاه حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ و $\vec{a} \times \vec{b}$ ساخته می‌شود را به دست آورید.

۴۲ اگر مساحت متوازی‌الاضلاعی که توسط بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ ساخته می‌شود $6\sqrt{3}$ باشد و $|\vec{a}| = 4$ ، $|\vec{b}| = 3$ ، حاصل $\vec{a} . (\vec{a} - \vec{b})$ را به دست آورید.

۴۳ اگر $\vec{a} = -\vec{i} - \sqrt{۳}\,\vec{k}$ و $\vec{b} = (\sqrt{۳}, ۲, ۱)$ باشد. تصویر قائم بردار $\vec{b}$ بر $\vec{a}$ و اندازه بردار تصویر را به دست آورید.

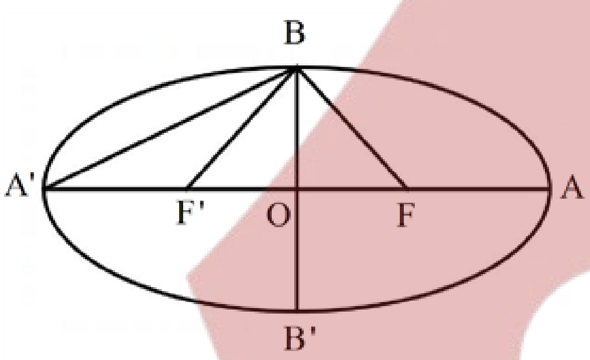
۴۴ درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

خط به معادله $\begin{cases} x = ۲ \\ y = ۳ \end{cases}$ بر صفحه xoz عمود است.

۴۵ یک شعاع نورانی در امتداد خط $x = ۴$ بر سهمی $x^۲ = ۸y$ می‌تابد. معادله خط بازتاب را بنویسید.

۴۶ معادله سهمی را بنویسید که خط هادی آن $y = -۲$ و کانون آن $F(۱, -۴)$ باشد.

۴۷ یک بیضی به مرکز O و کانون‌های F و F' مطابق شکل روبه‌رو مفروض است. اگر $S_{\triangle BA'O} = ۴S_{\triangle FBF'}$ باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.



۴۸ نقاط $B(-۱, ۲)$ و $B'(-۱, -۴)$ دو سر قطر کوچک یک بیضی با فاصله کانونی $۲\sqrt{۳}$ واحد است. طول قطر بزرگ بیضی را بیابید.

۴۹ معادله دایره‌ای را بنویسید که خطهای $x + y = ۱$ و $x - y = ۳$ شامل قطرهایی از آن باشند و روی خط به معادله $x + y = ۲$ وتری به طول $۲\sqrt{۲}$ ایجاد می‌کند.

۵۰ وضعیت دایره به معادله $x^۲ + y^۲ - ۶x + ۱۲y + ۲۰ = ۰$، نسبت به دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ واحد را مشخص کنید.

۵۱ دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروضند، نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.

۵۲ دایره‌هایی که مرکز آنها روی سهمی به معادله $(y - ۱)^۲ = -۸(x + ۱)$ واقع است و از کانون سهمی می‌گذرند، بر خط به معادله .... مماس هستند.

۵۳ دایرهٔ $۴x^۲ + ۸x + ۴y^۲ = ۲$ محورهای مختصات را در چند نقطه قطع می‌کند؟

۵۴ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که نقطهٔ $O(-۲, -۱)$ مرکز آن و $M(۱, ۱)$ یک نقطه از آن باشد.

۵۵ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰, ۱)$ بوده و بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y = ۳$ مماس داخل باشد.

۵۶ دو دایره به معادله‌های زیر نسبت به هم چه وضعیتی دارند؟

$x^۲ + y^۲ - ۸x - ۴y + ۱۹ = ۰$ $\qquad$ $x^۲ + y^۲ = ۴$

۵۷ معادلهٔ قطری از دایره $x^۲ + y^۲ - ۲y = ۰$ را بنویسید که بر خط $y + x = ۰$ عمود باشد.

۵۸ چند نقطه در صفحه‌ای که دو خط متقاطع $d_۱$ و $d_۲$ وجود دارد می‌توان یافت، که فاصلهٔ آن‌ها از خط $d_۱$ و $d_۲$ به‌ترتیب ۳ و ۴ سانتی‌متر باشد؟

۵۹ فرض کنید $\vec{a}$ و $\vec{b}$ بردارهایی به طول ۵ هستند که با یکدیگر زاویه $\frac{\pi}{۴}$ می‌سازند. مساحت مثلثی که توسط بردارهای $\vec{a} + \vec{b}$ و $۲\vec{a}$ تولید می‌شود را بیابید.

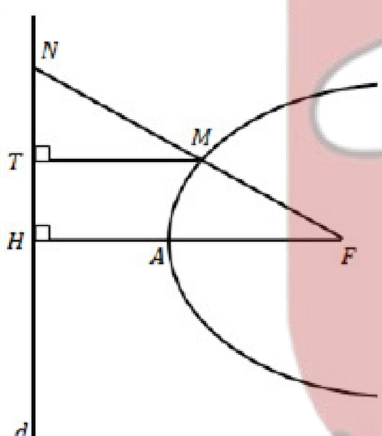
۶۰ اگر $\vec{a} = (۱, -۳, ۴)$ و $\vec{b} = ۳\vec{i} - ۴\vec{j} + ۲\vec{k}$ باشند، آنگاه تصویر قائم بردار $\vec{a}$ را بر امتداد بر بردار $\vec{a} - \vec{b}$ بیابید.

۶۱ برداری عمود بر دو بردار $\vec{a} = (۳, -۱, ۲)$ و $\vec{b} = (۱, ۲, -۱)$ بیابید.

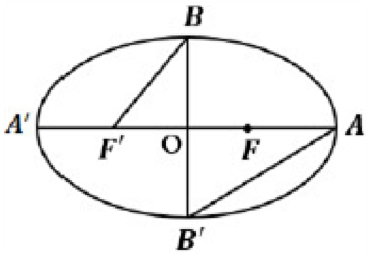
۶۲ اگر $|\vec{a}| = ۱۰$ و $|\vec{b}| = ۲$ و $\vec{a} . \vec{b} = ۱۲$ باشند و زاویه بین دو بردار حاده باشد، مقدار $|\vec{a} \times \vec{b}|$ را محاسبه کنید.

۶۳ در شکل مقابل، سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در نقطه N قطع کند و از نقطه M، MT را بر d عمود کرده‌ایم.

ثابت کنید: $\frac{\text{FN}}{\text{FA}} = \frac{۲\,\text{NT}}{\text{TH}}$



۶۴ در بیضی مقابل، خروج از مرکز برابر $\frac{۴}{۵}$ است. نسبت مساحت مثلث OBF' به مساحت مثلث OAB' را بیابید.



۶۵ وضعیت خط $x+y=۳$ و دایره $x^۲+y^۲-۲y-۳=۰$ را تعیین کنید.

۶۶ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰,۱)$ بوده و با دایره $(x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۱۶$ مماس داخل باشد.

۶۷ نقطهٔ A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصلهٔ ۳ سانتیمتر و از d به فاصلهٔ ۴ سانتیمتر باشد. (در مورد حالت‌های مختلف جواب بحث کنید.)

۶۸ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر $A_{n\times n}$ ماتریس دلخواه I_n ماتریس همانی و $A^۲-A=I$ باشد، وارون ماتریس A، برابر $(I-A)$ است.

ب) مکان هندسی مرکزی همه دایره‌های با شعاع ثابت r که بر دایره $C(O,r)$ در صفحه این دایره مماس خارج هستند، دایره $C'(O,۲r)$ است.

پ) بردار $\vec{a}=\left(۰,\frac{۱}{\sqrt{۵}},\frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)$، یک بردار یکه است.

۶۹ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) در ماتریس قطری $A=\begin{bmatrix}-۳ & ۰\\ ۲k-۱ & ۲\end{bmatrix}$، مقدار k برابر .... است.

ب) هرگاه صفحه‌ای شامل محور یک سطح مخروطی، آن را برش دهد، فصل مشترک حاصل .... است.

پ) حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای واحد $\vec{i}$ و $\vec{j}$ و $\vec{k}$ بنا می‌شود، برابر .... است.

۷۰ اگر سه بردار $\vec{a}=(m,-۱,۱)$، $\vec{b}=(۱,-۱,۱)$ و $\vec{c}=(۱,m,-۱)$ در یک صفحه واقع باشند، مقدار m را بیابید.

۷۱ ثابت کنید اگر دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ در یک راستا باشند، آنگاه تصویر قائم $\vec{a}$ بر امتداد $\vec{b}$، برابر خود $\vec{a}$ می‌شود.

۷۲ اگر زاویه بین دو بردار $\vec{a}=(۲,-۱,n)$ و $\vec{b}=(۱,۰,-۱)$ برابر با ۱۳۵ درجه باشد، مقدار n را بیابید.

۷۳ شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط $-۲<y\leq-۱$ ، $y<-x^۲+۱$ را در فضای دو بعدی رسم کنید.

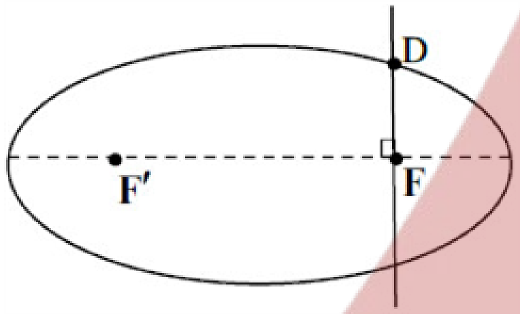
۷۴ معادلهٔ صفحه‌ای که بر محور zها در نقطه به مختصات $A=(۰,۰,۳)$ عمود باشد، به صورت .... است.

۷۵ مختصات نقاط برخورد سهمی $y^۲+۷x+۵=۰$ و دایرهٔ $x^۲+y^۲=۲۵$ را به دست آورید.

۷۶ معادلهٔ سهمی را بنویسید که $F(-۳,۲)$ مختصات کانون و معادله خط هادی آن $x=۱$ باشد.

۷۷ بیضی با قطر بزرگ $۲a$، قطر کوچک $۲b$ و کانون‌های F و F' مطابق شکل روبه‌رو مفروض است. اگر خطی در کانون F بر قطر کانونی عمود باشد و بیضی را در نقطه D قطع کند، ثابت کنید:

$$\mathrm{DF}=\frac{b^۲}{a}$$



۷۸ در یک بیضی مختصات کانون‌ها $F(۴,۰)$ و $F'(-۲,۰)$ و طول قطر بزرگ برابر با ۱۰ است. اگر نقطه $P(۱,m)$ روی این بیضی قرار داشته باشد، مقدار m را بیابید.

۷۹ در دایره به معادلهٔ ضمنی $x^۲+y^۲+\mathrm{ax}+\mathrm{by}+c=۰$ با استفاده از روش مربع کامل، ثابت کنید شعاع دایره برابر با $r=\frac{\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}}{۲}$ است.

۸۰ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(۲,-۱)$ مرکز آن بوده و از خط $۳x-۴y+۱۰=۰$ وتری به طول ۶ جدا کند.

۸۱ مکان هندسی مرکز همه دایره‌های با شعاع ثابت یک، که بر دایره $(x-۱)^۲+(y+۲)^۲=۱۶$ مماس خارج باشند، دایره‌ای به مرکز $O(۱,-۲)$ و شعاع .... است.

۸۲ هرگاه دو خط d و l موازی باشند، از دوران d حول l سطحی ایجاد می‌شود. اگر صفحهٔ P بر خط l عمود باشد، سطح مقطع صفحهٔ P و سطح ایجاد شده بیضی است. (درست - نادرست)

۸۳ حجم متوازی‌السطوحی را به دست آورید که توسط سه بردار $\overrightarrow{a}=(۱,۰,-۱)$ و $\overrightarrow{b}=(۰,۲,۲)$ و $\overrightarrow{c}=(۲,-۳,۰)$ تولید می‌شود.

۸۴ اگر $\left|\overrightarrow{a}\right|=۳$ و $\left|\overrightarrow{b}\right|=۵$ و حاصل‌ضرب داخلی دو بردار ۱۰ باشد، مساحت مثلثی که توسط دو بردار $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ تولید می‌شود چقدر است؟

۸۵ مقدار m را چنان بیابید که دو بردار $\overrightarrow{a}=(۲,m,-۱)$ و $\overrightarrow{b}=(m+۱,۳,۲)$ بر هم عمود باشند.

۸۶ طول بردار $\overrightarrow{a} = (۰, -۳, ۴)$ را به دست آورید.

۸۷ شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه $y = x^۲, -۱ < x \leq ۲$ را در فضای دو بعدی رسم کنید.

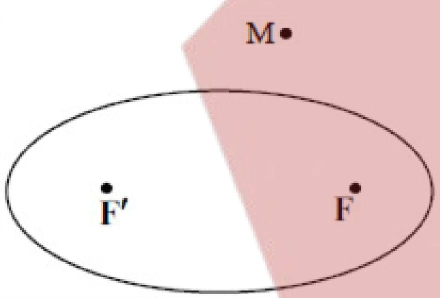
۸۸ اگر $\overrightarrow{a}$ و $\overrightarrow{b}$ دو بردار دلخواه، r عدد حقیقی و $\overrightarrow{b} = r\overrightarrow{a}$ آنگاه $\left|\overrightarrow{b}\right| = |r|\left|\overrightarrow{a}\right|$. (درست - نادرست)

۸۹ در فضای سه بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ z = ۰ \end{cases}$، معادله محور .... است.

۹۰ الف) معادله سهمی را بنویسید که $A(۲, ۳)$ رأس آن بوده و معادله خط هادی آن $x = ۳$ باشد.
ب) مختصات کانون سهمی را بیابید.
پ) مختصات نقطه برخورد سهمی با محور طولها را حساب کنید.

۹۱ اگر در یک بیضی طول AA' (قطر بزرگ) برابر با ۱۶ و خروج از مرکز $\frac{۳}{۴}$ باشد، فاصله رأس A تا نزدیک‌ترین کانون را به دست آورید.

۹۲ اگر M نقطه‌ای بیرون بیضی باشد، ثابت کنید مجموع فواصل نقطه M از کانونهای F و F' بزرگتر از طول قطر بزرگ بیضی است.



۹۳ وضعیت خط $x + y = ۱$ و دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y - ۲ = ۰$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۹۴ حدود a را طوری به دست آورید که $x^۲ + y^۲ - ۴x + ۶y + a = ۰$ معادله یک دایره باشد.

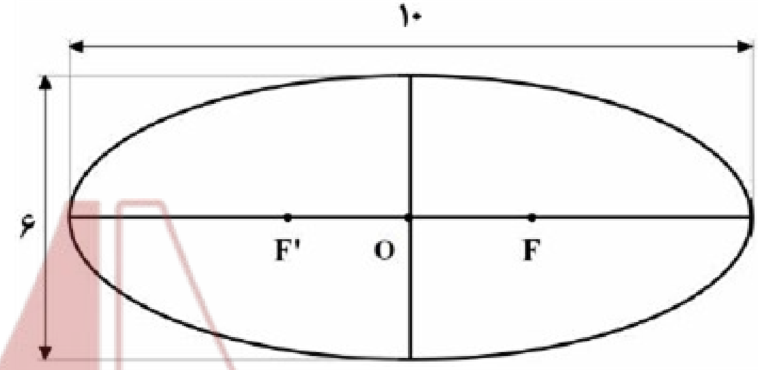
۹۵ دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.

۹۶ سهمی، مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشد. (درست - نادرست)

۹۷ اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد موازی نباشد و فقط یکی از دو نیمه سطح مخروطی را قطع کند، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک .... است.

۹۸ معادله گستردهٔ دایرهٔ $C(O, R)$ به شکل $x^۲ + y^۲ + ۲y - ۴x - ۴ = ۰$ است.
الف) مختصات مرکز و شعاع دایره C را محاسبه کنید.
ب) آیا نقطه $A(۰, ۳)$ روی محیط دایره C قرار دارد؟ چرا؟

۹۹ در بیضی زیر فاصله کانونی را محاسبه کنید. (F' و F کانون‌های بیضی هستند.)



۱۰۰ معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $(۱, ۴)$ و بر خط $۳x + ۴y = -۱$ مماس باشد.

۱) روش اول: به ازای هیچ مقدار m

$$\frac{-۴}{۲} \neq \frac{m-۳}{-\frac{(m-۳)}{۲}} \Rightarrow -۲ \neq -۲$$

روش دوم: به ازای هیچ mای دترمینان زیر مخالف صفر نمی‌شود.

$$\begin{vmatrix} -۴ & m-۳ \\ ۲ & -\frac{m-۳}{۲} \end{vmatrix} = -۴\left(-\frac{m-۳}{۲}\right) - ۲(m-۳) = ۰$$

۲)

$$\left|A^۳\right| = |A|^۳ = -۸ \Rightarrow |A| = -۲, \frac{\left|A^{-۱}\right|}{|۳A|} = \frac{\frac{۱}{|A|}}{۳^۲\,|A|} = \frac{۱}{۳۶}$$

۳)

$$A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲ = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}, A^۲ - ۲I = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۴) الف) درست ب) نادرست

۵)

$$A = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۳} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = \frac{-۱}{۴} + \frac{۱}{۶} = \frac{-۱}{۱۲} \neq ۰ \Rightarrow$$ دستگاه جواب منحصر به فرد دارد.

$$A\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ \frac{۵}{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-۱}\begin{bmatrix} ۱ \\ \frac{۵}{۲} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -۱۲\begin{bmatrix} \frac{-۱}{۲} & \frac{۱}{۳} \\ \frac{-۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ \frac{۵}{۲} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۶ & -۴ \\ ۶ & -۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ \frac{۵}{۲} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -۴ \\ -۹ \end{bmatrix}$$

۶)

$$A = \begin{bmatrix} ۴-۳ & ۴+۲ \\ -(۱۱-۱۰) & ۱۰+۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۶ \\ -۱ & ۱۳ \end{bmatrix}$$

$$|A| = (۱)(۱۳) - (-۱)(۶) = ۱۳ + ۶ = ۱۹$$

۷) برحسب ستون اول، دترمینان را بسط می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} ۱ & ۲ & ۷ \\ ۲ & -۱ & ۱ \\ x & ۱ & ۲ \end{vmatrix} = ۱\times(-۱)^{۱+۱}\begin{vmatrix} -۱ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} + ۲\times(-۱)^{۲+۱}\begin{vmatrix} ۲ & ۷ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} + x\times(-۱)^{۳+۱}\begin{vmatrix} ۲ & ۷ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix}$$

$$= ۱(-۲-۱) - ۲(۴-۷) + x\begin{vmatrix} ۲ & ۷ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} = ۳ + x\begin{vmatrix} ۲ & ۷ \\ -۱ & ۱ \end{vmatrix} \Rightarrow A = ۳$$

۸)

$$|۲A| + \left|A^{-۱}\right|^۳ = ۲^۳\,|A| + \frac{۱}{|A|^۳} = ۸(-۲) + \frac{۱}{-۸} = \frac{-۱۲۹}{۸}$$ (ص ۳۱)

۹)

$$|A| = ۲|A| - ۲ \Rightarrow |A| = ۲$$

$$||A|\,A + A| = |۲A + A| = |۳A| = ۹\,|A| = ۹\times۲ = ۱۸$$

۱۰ ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲&۱&۱\\۰&۲&۴\\۱&-۱&۲\end{bmatrix}$ تعیین اعداد

۱۲ = مجموع درایه ها

۱۱ (ص ۳۰ و ۳۱) $|۳A|=۴|A|^۲+۵\Rightarrow ۴|A|^۲-۹|A|+۵=۰\Rightarrow\begin{cases}|A|=۱\Rightarrow\left|A^{-۱}\right|=۱\\|A|=\frac{۵}{۴}\Rightarrow\left|A^{-۱}\right|=\frac{۴}{۵}\end{cases}$

۱۲ ۱- (ص ۲۸)

۱۳ (ص ۲۸ و ۳۰) $|A|=|A|\,(\,|A|-۲)+۱(۲)\Rightarrow|A|^۲-۳|A|+۲=۰\Rightarrow\begin{cases}|A|=۱\\|A|=۲\end{cases}$

۱۴ $\begin{bmatrix}۵&۲\\۷&۳\end{bmatrix}A=\begin{bmatrix}-۱&۲\\۲&۱\end{bmatrix}\Rightarrow A=\begin{bmatrix}۵&۲\\۷&۳\end{bmatrix}^{-۱}\begin{bmatrix}-۱&۲\\۲&۱\end{bmatrix}=\frac{۱}{۱۵-۱۴}\begin{bmatrix}۳&-۲\\-۷&۵\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۱&۲\\۲&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۷&۴\\۱۷&-۹\end{bmatrix}$

(ص ۲۵)

۱۵ $A=\begin{bmatrix}۱&۰&۰\\۰&۱&۰\\۰&۰&۱\end{bmatrix}\Rightarrow|A|=۱$

$k\,|\mathrm{kA}|=k(k^۳\,|A|\,)=k^۴\times۱=۶۲۵\Rightarrow k=\pm۵$ (ص ۳۱)

۱۶ $|A|=۲,\left|-\frac{۱}{۲}A^۴\right|=\left(-\frac{۱}{۲}\right)^۳|A|^۴=-۲$ (ص ۲۸ و ۳۱)

۱۷ $(A-B)^۲=(A-B)(A-B)=A^۲-\mathrm{AB}-\mathrm{BA}+B^۲\xrightarrow{\mathrm{AB=BA}}A^۲-۲\mathrm{AB}+B^۲$

(ص ۲۱)

۱۸ $\begin{cases}m+۱=۰\\۲n+۴=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}m=-۱\\n=-۲\end{cases}$

$A+I=\begin{bmatrix}۲&۰\\۰&۵\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۱&۰\\۰&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۰\\۰&۶\end{bmatrix}$ (ص ۲۱ و ۱۹)

۱۹ درست (ص ۳۱)

۲۰ الف) ۱۴ ب) وارون‌پذیری A یا $|A|\neq۰$

۲۱ اگر ماتریس $A=\begin{bmatrix}۰&۱&۲\\۰&۰&۳\\۰&۰&۰\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-۱&-۲&-۳\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}$ باشد، داریم:

$A\times B=\begin{bmatrix}۰&۱&۲\\۰&۰&۳\\۰&۰&۰\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}-۱&-۲&-۳\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۰&۰&۰\\۰&۰&۰\\۰&۰&۰\end{bmatrix}=\overline{O}$

۲۲
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$ (ص ۲۴)

$$A^{-1} = \frac{1}{6-4}\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

۲۳
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$ (ص ۲۱ و ۲۸)

الف) $A \times B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -5 & -4 & 3 \\ 4 & 11 & -5 \end{bmatrix}$

ب) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 1 \\ -2 & -1 \\ 1 & 2 \end{matrix}$

$$|B| = (-1+1-8) - (-2-2+2) = -6$$

۲۴
الف) $|A| = 4\times4\times4 = 64$

ب) سهمی است.

۲۵ بسط روی سطر اول

$$\begin{vmatrix} 0 & x-3 & x-2 \\ x+3 & 0 & -4 \\ x+2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = -(x-3)\begin{vmatrix} x+3 & -4 \\ x+2 & 0 \end{vmatrix} + (x-2)\begin{vmatrix} x+3 & 0 \\ x+2 & 6 \end{vmatrix}$$

$$-(x-3)(4(x+2)+(x-2))(6(x+3))$$

$2x^2 + 10x - 12 = 0 \Rightarrow x = 1$ یا $x = -6$

۲۶
$$A^2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{2n} = \begin{bmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A^{2n+1} = \begin{bmatrix} 2^{2n+1} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{20} - A^{19} = \begin{bmatrix} 2^{20} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2^{19} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{20}-2^{19} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^{19} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

۲۷
$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{1}{5}A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}$$ (ص ۲۳ و ۳۱)

$$5A = \begin{bmatrix} 15 & -5 \\ 5 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow (5A)^{-1} = \frac{1}{-50}\begin{bmatrix} -5 & 5 \\ -5 & 15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}$$

۲۸
$$|A|A|| = |4A| = 4^3|A| = 4^4$$

۲۹ الف) درست ب) درست پ) نادرست ت) نادرست

۳۰
$$|2A| = (|A|^2 + 4) \Rightarrow (|A| - 2)^2 = 0 \Rightarrow |A| = 2$$

$$\left|A^{-1}\right| = \frac{1}{|A|} = \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} m-۲=۰ \\ n+۱=۰ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=۲ \\ n=-۱ \end{cases}$$ ۳۱

$$\mathrm{AB}=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & -۱ \\ ۳ & -۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ & ۲ \\ ۶ & ۰ & -۳ \\ ۹ & -۳ & ۶ \end{bmatrix}$$

۳۲ دترمینان ماتریس A را برحسب ستون اول به دست می‌آوریم.

$$|A|=۲\begin{vmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۴ \end{vmatrix}=۲\times۱۰=۲۰,\ |B|=-۶\Rightarrow \left|B^{۲}\right|=۳۶$$

$$|A|+\left|B^{۲}\right|=۵۶$$

الف) $A=\begin{bmatrix} ۳ & -۵ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=۳+۱۰=۱۳\neq ۰$ ۳۳

$\frac{۳}{۲}\neq\frac{-۵}{۱}\Rightarrow$ دستگاه یک جواب منحصر به فرد دارد.

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۱۳}\begin{bmatrix} ۱ & ۵ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۳} & \frac{۵}{۱۳} \\ \frac{-۲}{۱۳} & \frac{۳}{۱۳} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۱۳} & \frac{۵}{۱۳} \\ \frac{-۲}{۱۳} & \frac{۳}{۱۳} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ \\ ۸ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{-۱+۴۰}{۱۳} \\ \frac{۲+۲۴}{۱۳} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ \\ ۲ \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{matrix} x=۳ \\ y=۲ \end{matrix}$$

ب) $\frac{-۲}{۴}=\frac{۳}{-۶}=\frac{۲}{-۴}$ دو خط بر هم منطبقند پس دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

پ) $\frac{۱}{-۲}=\frac{۳}{-۶}\neq\frac{۵}{-۱}\Rightarrow$ دو خط با هم موازیند پس دستگاه جواب ندارد.

الف) $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{matrix} a & b \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$ ۳۴

$$\Rightarrow |A|=(\mathrm{aei}+\mathrm{bfg}+\mathrm{cdh})-(\mathrm{ceg}+\mathrm{afh}+\mathrm{bdi})$$

$$B=\begin{bmatrix} \mathrm{ka} & \mathrm{kb} & \mathrm{kc} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\Rightarrow |B|=\begin{bmatrix} \mathrm{ka} & \mathrm{kb} & \mathrm{kc} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}\begin{matrix} \mathrm{ka} & \mathrm{kb} \\ d & e \\ g & h \end{matrix}$$

$$\Rightarrow |B|=(\mathrm{kaei}+\mathrm{kbfg}+\mathrm{kcdh})-(\mathrm{kceg}+\mathrm{kafh}+\mathrm{kbdi})$$

$$=k(\mathrm{aei}+\mathrm{bfg}+\mathrm{cdh})-(\mathrm{ceg}+\mathrm{afh}+\mathrm{bdi})=k|A|\Rightarrow |B|=k|A|$$

ب) $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\Rightarrow |A|=\mathrm{ad}-\mathrm{bc}$

$$B=\begin{bmatrix} \mathrm{ka} & \mathrm{kb} \\ c & d \end{bmatrix}\Rightarrow |B|=\mathrm{kad}-\mathrm{kbc}=k(\mathrm{ad}-\mathrm{bc})=k|A|$$

۳۵

$$A=\begin{bmatrix} r_۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & r_۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & r_۳ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} b_{۱۱} & b_{۱۲} & b_{۱۳} \\ b_{۲۱} & b_{۲۲} & b_{۲۳} \\ b_{۳۱} & b_{۳۲} & b_{۳۳} \end{bmatrix}$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} r_۱b_{۱۱} & r_۱b_{۱۲} & r_۱b_{۱۳} \\ r_۲b_{۲۱} & r_۲b_{۲۲} & r_۲b_{۲۳} \\ r_۳b_{۳۱} & r_۳b_{۳۲} & r_۳b_{۳۳} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

سطر اول B در $r_۱$ ضرب می شود
سطر دوم B در $r_۲$ ضرب می شود
سطر سوم B در $r_۳$ ضرب می شود

$$B\times A=\begin{bmatrix} r_۱b_{۱۱} & r_۲b_{۱۲} & r_۳b_{۱۳} \\ r_۱b_{۲۱} & r_۲b_{۲۲} & r_۳b_{۲۳} \\ r_۱b_{۳۱} & r_۲b_{۳۲} & r_۳b_{۳۳} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

سطر اول B در $r_۱$ ضرب می شود
سطر دوم B در $r_۲$ ضرب می شود
سطر سوم B در $r_۳$ ضرب می شود

۳۶ ابتدا ماتریس $A^۲$ را به دست می‌آوریم.

$$A^۲=A\times A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۹ & -۲ \end{bmatrix}$$

پس داریم:

$$A^۲+\mathrm{m}A+\mathrm{n}I_۲=\bar{o}\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱ & -۳ \\ ۹ & -۲ \end{bmatrix}+m\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}+n\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\bar{o}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} ۱+۲m+n & -۳-m \\ ۹+۳m & -۲+m+n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{cases} -۳-m=۰\Rightarrow m=-۳ \\ ۱+۲m+n=۰\Rightarrow n=۵ \end{cases}\Rightarrow m+n=۲$$

۳۷

$$\begin{cases} ۳x-۴y=۱۳ \\ ۲x+y=۵ \end{cases}\Rightarrow \overbrace{\begin{bmatrix} ۳ & -۴ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}}^{A}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۳ \\ ۵ \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=A^{-۱}\begin{bmatrix} ۱۳ \\ ۵ \end{bmatrix}$$

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۱۱}\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ -۲ & ۳ \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۱۱} & \frac{۴}{۱۱} \\ \frac{-۲}{۱۱} & \frac{۳}{۱۱} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱۳ \\ ۵ \end{bmatrix}\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{۱۳}{۱۱}+\frac{۲۰}{۱۱}=۳ \\ y=\frac{-۲۶}{۱۱}+\frac{۱۵}{۱۱}=-۱ \end{cases}$$

۳۸

$$A^{-۱}=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix} -۳ & -۴ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix}\Rightarrow A^{-۱}+I=\begin{bmatrix} -۳ & -۴ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & -۴ \\ -۲ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^{-۱}+I)^{-۱}=\frac{۱}{-۴}\begin{bmatrix} -۲ & ۴ \\ ۲ & -۲ \end{bmatrix}\Rightarrow (A^{-۱}+I)^{-۱}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -۱ \\ \frac{-۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

۳۹ ابتدا معادله داده شده را حل می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} ۱ & b & a+۱ \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix}=۰ \xrightarrow[\text{سوم بسط می دهیم}]{\text{برحسب ستون}} (a+۱)(-۱)^۴\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix}+۳(-۱)^۵\begin{vmatrix} ۱ & b \\ -۱ & ۲ \end{vmatrix}=۰$$

$$\Rightarrow (a+۱)(۵)-۳(۲+b)=۰\Rightarrow ۵a+۵-۶-۳b=۰\Rightarrow ۵a-۳b=۱$$

حال دترمینان خواسته شده را محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{vmatrix} ۱ & b & a \\ ۲ & ۱ & ۳ \\ -۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix} \xrightarrow[\text{بسط می دهیم}]{\text{برحسب سطر سوم}} (-۱)(-۱)^۴\begin{vmatrix} b & a \\ ۱ & ۳ \end{vmatrix}+۲(-۱)^۵\begin{vmatrix} ۱ & a \\ ۲ & ۳ \end{vmatrix}$$

$$=-۱(۳b-a)-۲(۳-۲a)=-۳b+a-۶+۴a=۵a-۳b-۶\xrightarrow{۵a-۳b=۱}=۱-۶=-۵$$

$$AB=[۱\ ۲\ -۳]\begin{bmatrix}-۲\\-۱\\۳\end{bmatrix}=[-۲+(-۲)+(-۹)]=[-۱۳]=-۱۳\Rightarrow |AB|=-۱۳$$ ۴۰

$$BA=\begin{bmatrix}-۲\\-۱\\۳\end{bmatrix}[۱\ ۲\ -۳]=\begin{bmatrix}-۲&-۴&۶\\-۱&-۲&۳\\۳&۶&-۹\end{bmatrix}$$

$$|BA|=\begin{bmatrix}-۲&-۴&۶\\-۱&-۲&۳\\۳&۶&-۹\end{bmatrix}\begin{matrix}-۲&-۴\\-۱&-۲\\۳&۶\end{matrix}\Rightarrow |BA|=(-۳۶-۳۶-۳۶)-(-۳۶-۳۶-۳۶)=۰$$

۴۱ بخش اول، به سه روش زیر قابل حل است:

$$(\vec a-\vec b)\perp(\vec a+\vec b)\Rightarrow\begin{cases}(\vec a-\vec b).(\vec a+\vec b)=۰\begin{cases}(-m,۲,-m-۴).(-m,-۴,m)\\ \quad =۰\Rightarrow m=-۲\\ \left|\vec a\right|^۲-\left|\vec b\right|^۲=۰\Rightarrow\left|\vec a\right|=\left|\vec b\right|\\ \quad\Rightarrow m=-۲\end{cases}\\ \text{چهارضلعی بنا شده روی بردارهای } \vec a \text{ و } \vec b \text{ لوزی است}\\ \Rightarrow\left|\vec a\right|=\left|\vec b\right|\Rightarrow m=-۲\end{cases}$$

بخش دوم، به سه روش زیر قابل حل است:

$$\vec a\times\vec b=(-۶,۰,-۶)\Rightarrow\begin{cases}V=\left|(\vec a\times\vec b).(\vec a\times\vec b)\right|=۷۲\\ \begin{vmatrix}۲&-۱&-۲\\۰&-۳&۰\\-۶&۰&-۶\end{vmatrix}=۷۲\Rightarrow V=۷۲\\ h=\vec a\times\vec b\Rightarrow V=\mathrm{Sh}=\left|(\vec a\times\vec b)\right|^۲=۷۲\end{cases}$$

$$\left|\vec a\times\vec b\right|=۶\sqrt{۳},\ \mathrm{Sin}\,\theta=\frac{۶\sqrt{۳}}{۴\times۳}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow\mathrm{Cos}\,\theta=\pm\frac{۱}{۲}$$ ۴۲

$$a.(a-b)=\left|\vec a\right|^۲-\vec a.\vec b=۴^۲-۴\times۳\times\left(\pm\frac{۱}{۲}\right)=۱۶\pm۶$$

$$\vec a=(-۱,۰,-\sqrt{۳})$$ ۴۳

$$\vec b\,'=\frac{\vec a.\vec b}{\left|\vec a\right|^۲}\vec a=\frac{-۲\sqrt{۳}}{۴}(-۱,۰,-\sqrt{۳})=\left(\frac{\sqrt{۳}}{۲},۰,\frac{۳}{۲}\right),\left|\vec b\,'\right|=\sqrt{۳}$$

۴۴ نادرست

$(x=۴\Rightarrow y=۲)\Rightarrow A(۳,۲)$ ۴۵

$(۴a=۸\Rightarrow a=۲)\Rightarrow F(۰,۲)\,,y=۲$ خط بازتاب از کانون می‌گذرد.

$S=(۱,-۳)\,,a=۱\Rightarrow(x-۱)^۲=-۴(y+۳)$ ۴۶

۴۷

$$\frac{S_{\mathrm{FBF'}}}{S_{\mathrm{BA'O}}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times ۲c\times b}{\frac{۱}{۲}\times a\times b}=\frac{۱}{۴}\Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{۱}{۸}$$

۴۸

$$\mathrm{BB'}=۲b=۶\Rightarrow b=۳\,,\,۲c=۲\sqrt{۳}\Rightarrow c=\sqrt{۳}$$

$$a^{۲}=b^{۲}+c^{۲}=۳^{۲}+(\sqrt{۳})^{۲}=۱۲\Rightarrow a=۲\sqrt{۳}\Rightarrow \mathrm{AA'}=۲a=۴\sqrt{۳}$$

۴۹

$$\begin{cases}x+y=۱\\x-y=۳\end{cases}\Rightarrow O(۲,-۱)\Rightarrow \mathrm{OH}=\frac{۱}{\sqrt{۲}}\,,r^{۲}=\left(\frac{۱}{\sqrt{۲}}\right)^{۲}+(\sqrt{۲})^{۲}=\frac{۵}{۲}$$

$$(x-۲)^{۲}+(y+۱)^{۲}=\frac{۵}{۲}$$

۵۰

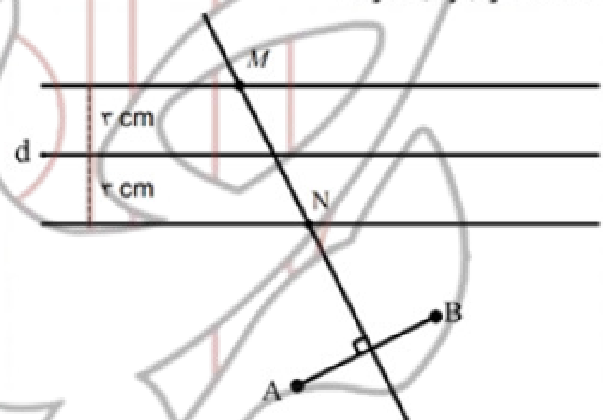
$$O(۳,-۶)\,,R=۵$$

$$O'(۰,۰)\,,R'=۳$$

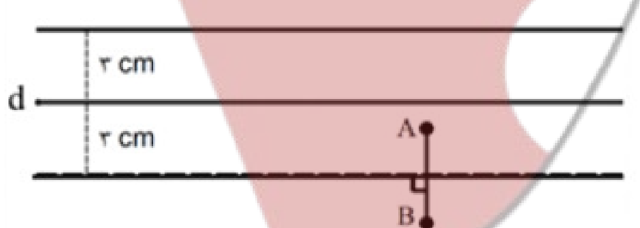
$\mathrm{OO'}=۳\sqrt{۵}\,,|R-R'|<\mathrm{OO'}<R+R'\Rightarrow$ دو دایره متقاطع هستند

۵۱ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف AB و مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ cm باشد، دو خط موازی ی به فاصله ۳ cm از آن هستند. بنابراین نقطه برخورد عمودمنصف AB و دو خط موازی d، جواب مسئله است.

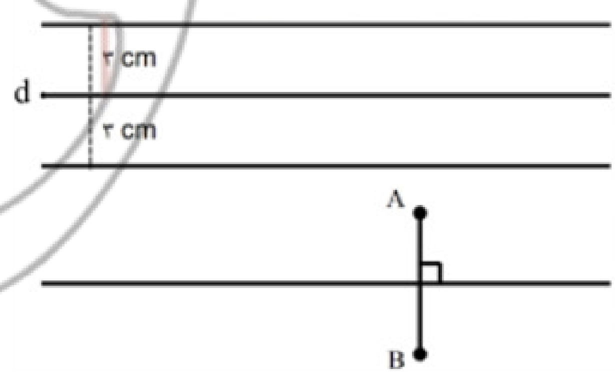
مساله دو جواب دارد.



مساله بی شمار جواب دارد.



مساله فاقد جواب است.



۵۲ $x=۱$

۵۳ چون باید محورهای مختصات را قطع کند، پس یک بار $x=۰$ و بار دیگر $y=۰$ را قرار می‌دهیم.

$$x=۰\Rightarrow ۴y^{۲}=۲\Rightarrow y=\pm\frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

$$y=۰\Rightarrow ۴x^{۲}+۸x=۲\Rightarrow ۴x^{۲}+۸x-۲=۰\Rightarrow x=\frac{-۸\pm\sqrt{۹۶}}{۸}$$

پس دایره، محورهای مختصات را در ۴ نقطه قطع می‌کند.

۵۴ فاصلهٔ مرکز دایره از یک نقطه روی آن، شعاع دایره است.

$$\mathrm{MO}=\sqrt{(۱+۲)^{۲}+(۱+۱)^{۲}}=\sqrt{۹+۴}=\sqrt{۱۳}$$

$$(x+۲)^{۲}+(y+۱)^{۲}=۱۳\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}+۴x+۲y-۸=۰$$

۵۵ اگر دو دایره مماس داخل باشند، باید $\mathrm{OO}'=|r-r'|$ باشد.

$$x^{۲}+y^{۲}-۴x-۶y=۳\Rightarrow x^{۲}-۴x+۴-۴+y^{۲}-۶y+۹-۹=۳$$

$$\Rightarrow (x-۲)^{۲}+(y-۳)^{۲}=۱۶\Rightarrow O'(۲,۳), r'=۴$$

$$\mathrm{OO}'=\sqrt{(۲-۰)^{۲}+(۳-۱)^{۲}}=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$$

$$\mathrm{OO}'=|r-r'|\Rightarrow ۲\sqrt{۲}=|r-۴|\Rightarrow r-۴=\pm ۲\sqrt{۲}\Rightarrow r=۲\sqrt{۲}+۴ \text{ یا } r=-۲\sqrt{۲}+۴$$

$$(x-۰)^{۲}+(y-۱)^{۲}=(۲\sqrt{۲}+۴)^{۲}\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-۲y-۲۳-۱۶\sqrt{۲}=۰$$

$$(x-۰)^{۲}+(y-۱)^{۲}=(۴-۲\sqrt{۲})^{۲}\Rightarrow x^{۲}+y^{۲}-۲y-۲۳+۱۶\sqrt{۲}=۰$$

۵۶

$$x^{۲}+y^{۲}=۴\Rightarrow O(۰,۰), r=۲$$

$$x^{۲}-۸x+۱۶-۱۶+y^{۲}-۴y+۴-۴+۱۹=۰\Rightarrow (x-۴)^{۲}+(y-۲)^{۲}=۱$$

$$\Rightarrow O'(۴,۲), r'=۱$$

$$\mathrm{OO}'=\sqrt{(۴-۰)^{۲}+(۲-۰)^{۲}}=\sqrt{۲۰}$$

$\Rightarrow \mathrm{OO}'>r+r'$ پس دو دایره متخارج هستند.

۵۷

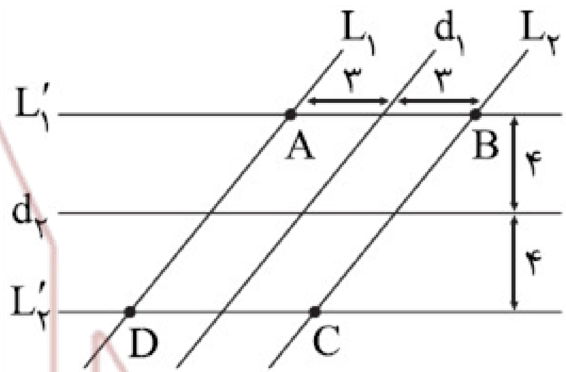
$$x^{۲}+(y-۱)^{۲}=۱$$

$O\left|\begin{matrix}۰\\۱\end{matrix}\right.$ مرکز دایره است. شیب خطی که از O می‌گذرد و بر $y+x=۰$ عمود است، باید ۱ باشد. پس داریم:

$$y-۱=۱(x-۰)\Rightarrow y=x+۱$$

۵۸ ابتدا دو خط متقاطع $d_۱$ و $d_۲$ را رسم کرده و سپس دو خط $L_۱$ و $L_۲$ را به موازات $d_۱$ به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از آن رسم می‌کنیم. پس از آن دو خط $L'_۱$ و $L'_۲$ را موازی $d_۲$ و به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر از آن رسم می‌کنیم.

محل برخورد خط‌های $L_۱$ و $L_۲$ با $L'_۱$ و $L'_۲$ جواب مسأله است که مطابق شکل در چهار نقطهٔ A، C و D هم‌دیگر را قطع می‌کنند.



۵۹

$$S=\frac{۱}{۲}\left|۲\vec{a}\times(\vec{a}+\vec{b})\right|=\frac{۱}{۲}\left|۲\vec{a}\times\vec{a}+۲\vec{a}\times\vec{b}\right| \text{ (ص ۸۴)}$$

$$S=\frac{۱}{۲}\left|۰+۲\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\left|\operatorname{Sin}\theta\right|=۵\times۵\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۲۵\sqrt{۲}}{۲}$$

۶۰

$$\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=(-۲,۱,۲) \text{ (ص ۸۴)}$$

$$\vec{a}'=\frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{\left|\vec{d}\right|^{۲}}\vec{d}=\frac{(-۲-۳+۸)}{(-۲)^{۲}+۱^{۲}+۲^{۲}}(-۲,۱,۲)=\left(\frac{-۲}{۳},\frac{۱}{۳},\frac{۲}{۳}\right)$$

۶۱

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ ۳ & -۱ & ۲ \\ ۱ & ۲ & -۱ \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & -۱ \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} ۳ & ۲ \\ ۱ & -۱ \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} ۳ & -۱ \\ ۱ & ۲ \end{vmatrix} \text{ (ص ۸۴)}$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=-۳\vec{i}+۵\vec{j}+۷\vec{k}=(-۳,۵,۷)$$

۶۲

$$\vec{a}\,.\,\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\operatorname{Cos}\theta\Rightarrow ۱۲=۱۰\times۲\times\operatorname{Cos}\theta\Rightarrow\operatorname{Cos}\theta=\frac{۳}{۵} \text{ (ص ۸۴)}$$

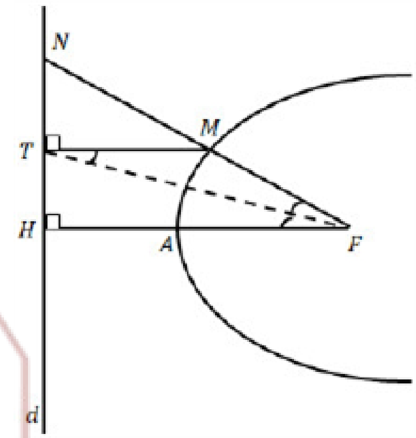
$$\operatorname{Sin}\theta=\sqrt{۱-\left(\frac{۳}{۵}\right)^{۲}}=\frac{۴}{۵} \text{ (حاده است } \theta\text{)}$$

$$\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|\operatorname{Sin}\theta=۲\times۱۰\times\frac{۴}{۵}=۱۶$$

۶۳ بنا به تعریف سهمی $\mathrm{MT}=\mathrm{MF}$ و لذا مثلث MFT متساوی‌الساقین است پس $\widehat{\mathrm{MFT}}=\widehat{\mathrm{MFT}}$ از طرفی $\mathrm{FH} \parallel \mathrm{MT}$ و FT خط مورب می‌باشد پس بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\widehat{\mathrm{MTF}}=\widehat{\mathrm{TFH}}$ از دو رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که TF نیمساز زاویهٔ $\widehat{\mathrm{NFH}}$ می‌باشد.

با استفاده از قضیهٔ نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{\mathrm{NF}}{\mathrm{FH}}=\frac{\mathrm{NH}}{\mathrm{TH}} \Rightarrow \frac{\mathrm{NF}}{۲\mathrm{FA}}=\frac{\mathrm{NT}}{\mathrm{TH}} \Rightarrow \frac{\mathrm{NF}}{\mathrm{FA}}=\frac{۲\mathrm{NT}}{\mathrm{TH}}$$



۶۴

$$\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}$$

$$\frac{S_{\Delta \mathrm{OBF'}}}{S_{\Delta \mathrm{OAB}}}=\frac{\frac{۱}{۲}\mathrm{OB}\times \mathrm{OF'}}{\frac{۱}{۲}\mathrm{OB}\times \mathrm{OA}}=\frac{\frac{۱}{۲}\mathrm{bc}}{\frac{۱}{۲}\mathrm{ba}}=\frac{c}{a}=\frac{۴}{۵}$$

۶۵ روش اول: $x+y=۳ \Rightarrow y=۳-x$ (ص ۴۵)

$$x^۲+y^۲-۲y-۳=۰ \Rightarrow x^۲+(۳-x)^۲-۲(۳-x)-۳=۰$$

$$۲x^۲-۴x=۰$$

دلتای معادلهٔ اخیر مثبت است بنابراین دو ریشه متمایز دارد که طول نقاط تقاطع است. پس خط و دایره متقاطع‌اند.

روش دوم:

$$\left.\begin{aligned} x^۲+y^۲-y-۳=۰ \Rightarrow O(۰,۱)\,,\ r=\tfrac{۱}{۲}\sqrt{۴+۱۲}=۲ \\ \mathrm{OH}=\frac{|۰+۱-۳|}{\sqrt{۱+۱}}=\sqrt{۲} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \sqrt{۲}<۲ \Rightarrow \mathrm{OH}<r$$

پس خط و دایره متقاطعند.

۶۶ $(x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۱۶ \Rightarrow O'(۲,۳), r'=۴$ (ص ۴۴)

$$d=\mathrm{OO'}=\sqrt{(۰-۲)^۲+(۱-۳)^۲}=\sqrt{۸}$$

$$|r-r'|=d \Rightarrow |r-۴|=\sqrt{۸} \Rightarrow r=۴\pm ۲\sqrt{۲}$$

$$(x-۰)^۲+(y-۱)^۲=(۴\pm ۲\sqrt{۲})^۲$$

۶۷ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ثابت ۳ سانتی‌متر هستند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ سانتی‌متر است. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشند، دو خط موازی با d و در طرفین خط d است. اشتراک این دو مکان هندسی را درنظر می‌گیریم.

اگر دایره دو خط موازی را قطع نکند، جوابی نخواهد داشت.

اگر دایره بر یکی از خطوط موازی مماس باشد، یک جواب دارد.

اگر دایره یکی از دو خط موازی را قطع کند دو جواب خواهد داشت. (ص ۳۹)

۶۸ الف) نادرست (ص ۲۲) ب) درست (ص ۳۹) پ) درست (ص ۷۵)

۶۹ الف) $k = \frac{1}{2}$ (ص ۱۲)

ب) دو خط متقاطع (ص ۳۹)

پ) یک (ص ۸۲ و ۸۳)

۷۰

$$V = 0 \Rightarrow \left|\vec{a}\,.\,(\vec{b} \times \vec{c})\right| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} m & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & m & -1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow m^2 - 2m + 1 = 0 \Rightarrow m = 1$$

۷۱

$$\vec{a} = r\,\vec{b}$$

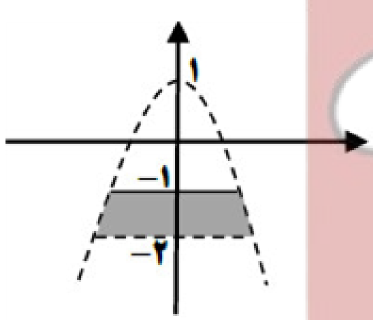
$$\vec{a}\,' = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\,\vec{b} = \frac{(r\,\vec{b})\,.\,\vec{b}}{\left|\vec{b}\right|^2}\,\vec{b} = \frac{r\left|\vec{b}\right|^2}{\left|\vec{b}\right|^2}\,\vec{b} = r\,\vec{b} = \vec{a}$$ (ص ۸۰)

۷۲

$$\operatorname{Cos}\theta = \frac{\vec{a}\,.\,\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\left|\vec{b}\right|} \Rightarrow -\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-n}{\sqrt{2}\times\sqrt{4+1+n^2}} \Rightarrow \frac{n-2}{\sqrt{n^2+5}} = 1$$

$$n^2 + 5 = n^2 - 4n + 4 \Rightarrow n = -\frac{1}{4}$$ (ص ۷۸)

۷۳



(ص ۶۳)

۷۴ $z = 3$ (ص ۶۸)

۷۵

$$\begin{cases} y^{۲} + ۷x + ۵ = ۰ \\ x^{۲} + y^{۲} = ۲۵ \end{cases} \Rightarrow x^{۲} + (-۷x - ۵) = ۲۵ \Rightarrow x^{۲} - ۷x - ۳۰ = ۰$$

$x = -۳, x = ۱۰$ (ص ۵۸)

$$\begin{cases} x = -۳ \Rightarrow y^{۲} = ۱۶ \Rightarrow y = \pm ۴ \Rightarrow (-۳, ۴), (-۳, -۴) \\ x = ۱۰ \Rightarrow y^{۲} = -۷۵ \end{cases}$$

۷۶ با توجه به جایگاه کانون و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانه آن به سمت چپ می‌باشد.

مختصات رأس سهمی $A(-۱, ۲)$، در این سهمی $a = \mathrm{AF} = ۲$

معادله آن برابر است با: $(y - ۲)^{۲} = -۸(x + ۱)$

(ص ۵۸)

۷۷ نقطه D روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی: $\mathrm{DF} + \mathrm{DF}' = ۲a$

در مثلث قائم‌الزاویه DFF' بنا به قضیه فیثاغورث داریم:

$$\mathrm{DF}^{۲} + \mathrm{FF}'^{۲} = \mathrm{DF}'^{۲} \Rightarrow \mathrm{DF}^{۲} + (۲c)^{۲} = (۲a - \mathrm{DF})^{۲}$$

$$\mathrm{DF} = \frac{a^{۲} - c^{۲}}{a} \xrightarrow{a^{۲} - c^{۲} = b^{۲}} \mathrm{DF} = \frac{b^{۲}}{a}$$

۷۸ $\mathrm{PF} + \mathrm{PF}' = ۲a \Rightarrow \sqrt{۹ + m^{۲}} + \sqrt{۹ + m^{۲}} = ۱۰ \Rightarrow m = \pm ۴$ (ص ۴۸)

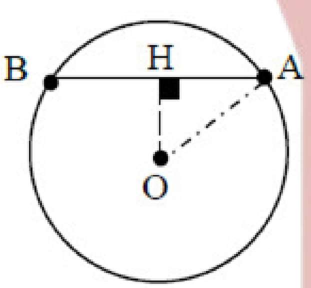
۷۹

$$x^{۲} + y^{۲} + \mathrm{ax} + \mathrm{by} + c = ۰ \Rightarrow \left(x^{۲} + \mathrm{ax} + \frac{a^{۲}}{۴}\right) + \left(y^{۲} + \mathrm{by} + \frac{b^{۲}}{۴}\right) = -c + \frac{a^{۲}}{۴} + \frac{b^{۲}}{۴}$$

$$\left(x + \frac{a}{۲}\right)^{۲} + \left(y + \frac{b}{۲}\right)^{۲} = \frac{a^{۲} + b^{۲} - ۴c}{۴} \Rightarrow r^{۲} = \frac{a^{۲} + b^{۲} - ۴c}{۴} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{a^{۲} + b^{۲} - ۴c}}{۲}$$

(ص ۴۱)

۸۰ از مرکز دایره بر وتر عمود می‌کنیم عمود OH وتر AB را نصف می‌کند.



$$\mathrm{AH} = \frac{۱}{۲}\mathrm{AB} = ۳$$

$$\mathrm{OH} = \frac{|۳(۲) - ۴(-۱) + ۱۰|}{\sqrt{۹ + ۱۶}} = ۴$$

$$\mathrm{OA}^{۲} = \mathrm{OH}^{۲} + \mathrm{AH}^{۲} \Rightarrow r^{۲} = (۴)^{۲} + (۳)^{۲} = ۲۵, (x - ۲)^{۲} + (y + ۱)^{۲} = ۲۵$$

۸۱ ۵ (ص ۳۹)

۸۲ نادرست (ص ۳۹)

۸۳ $(\vec{b}\times\vec{c}) = (۶,۴,-۴)$ (ص ۸۳)

$$v = \left|\vec{a}\,.\,(\vec{b}\times\vec{c})\right| = |(۱,۰,۱).(۶,۴,-۴)| = ۱۰$$

اگر دانش‌آموز به صورت زیر حل کند نمره کامل داده شود:

$$v = \left|\vec{a}\,.\,(\vec{b}\times\vec{c})\right| = \left\|\begin{matrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۲ & ۲ \\ ۲ & -۳ & ۰ \end{matrix}\right\| = ۱۰$$

۸۴ $\vec{a}\,.\,\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\operatorname{Cos}\theta \Rightarrow ۱۰ = ۳\times۵\operatorname{Cos}\theta \Rightarrow \operatorname{Cos}\theta = \frac{۲}{۳}, \operatorname{Sin}\theta = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$

$|\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}||\vec{b}|\operatorname{Sin}\theta = ۵\sqrt{۵} \Rightarrow s_{\Delta} = \frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}| = \frac{۵\sqrt{۵}}{۲}$ (ص ۸۴)

۸۵ $\vec{a}\perp\vec{b} \Rightarrow \vec{a}\,.\,\vec{b} = ۰ \Rightarrow ۲(m+۱)+۳m-۲ = ۰ \Rightarrow m = ۰$ (ص ۷۹)

۸۶ $\vec{a} = \sqrt{x^۲+y^۲+z^۲} = ۵$ (ص ۷۳)

۸۷ رسم نمودار (به طوری که نقطه توپر و توخالی مشخص باشد) (ص ۶۳)

۸۸ درست (ص ۷۵)

۸۹ عرض ها یا محور yها (ص ۶۷)

۹۰ الف) با توجه به جایگاه رأس و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانه آن به سمت چپ می‌باشد.

در این سهمی $a=۱$ و معادله آن برابر است با: $(y-۳)^۲ = -۴(x-۲)$

ب) مختصات کانون سهمی $F(-a+h,k) = (-۱+۲,۳) = (۱,۳)$

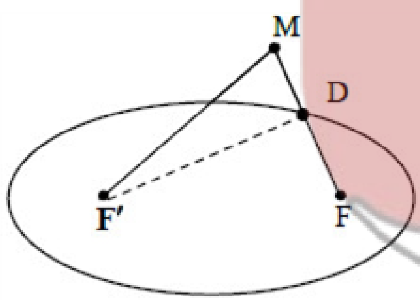
پ) مختصات محل برخورد با محور طول‌ها برابر است با:

$y = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۱}{۴}, \left(\frac{-۱}{۴},۰\right)$ (ص ۵۸ و ۵۴)

۹۱ $\frac{c}{a} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{a=۸} c = ۶ \Rightarrow \text{AF} = a-c = ۲$ (ص ۴۹)

۹۲ از نقطه M به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم تا بیضی را در نقطه D قطع کند، نقطه D روی بیضی قرار دارد بنا بر تعریف بیضی: $\text{DF}+\text{DF}' = ۲a$

بنابر نامساوی مثلثی در مثلث MDF' داریم:



$$\text{MD}+\text{MF}' > \text{DF}' \xrightarrow{+\text{DF}}$$
$$\text{DF}+\text{MD}+\text{MF}' > \text{DF}+\text{DF}'$$
$$\Rightarrow \text{MF}+\text{MF}' > ۲a$$

(ص ۴۷)

۹۳ $(x-۱)^۲+(y-۱)^۲=۴, O=(۱,۱), r=۲, d=\frac{|۱+۱-۱|}{\sqrt{۱^۲+۱^۲}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

$d<r$

خط و دایره در دو نقطه متقاطع هستند.

۹۴ $a^۲+b^۲>۴c \Rightarrow ۱۶+۳۶>۴a \Rightarrow a<۱۳$ (ص ۴۶)

۹۵ مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله‌اند عمودمنصف پاره‌خط AB است این خط را رسم می‌کنیم و l می‌نامیم. مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر هستند دو خط d', d'' می‌باشند که موازی d هستند.

محل برخورد دو خط d', d'' با خط l جواب مساله است.

الف - اگر خط l دو خط d', d'' را قطع کند مسئله دو جواب دارد.

ب - اگر خط l بر یکی از دو خط d' یا d'' منطبق باشد مسئله بی‌شمار جواب دارد.

پ - اگر خط l هیچ‌یک از دو خط d', d'' را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

رسم یک مورد شکل برای مسأله الزامی است. (ص ۳۸)

۹۶ درست (ص ۵۱)

۹۷ بیضی (ص ۳۵)

۹۸ الف) $O\left(-\frac{a}{۲}, -\frac{b}{۲}\right)=(۲,-۱), R=\frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲+b^۲-۴c}=۳$

ب) خیر زیرا: $(۰)^۲+(۳)^۲+۲(۳)-۴(۰)-۴\neq ۰$

۹۹ $a^۲=b^۲+c^۲ \xrightarrow{a=۵\ ,\ b=۳} c=۴ \Rightarrow FF'=۸$

۱۰۰ $r=\frac{|۳\times۱+۴(۴)+۱|}{\sqrt{۳^۲+۴^۲}}=۴ \Rightarrow (x-۱)^۲+(y-۴)^۲=۱۶$