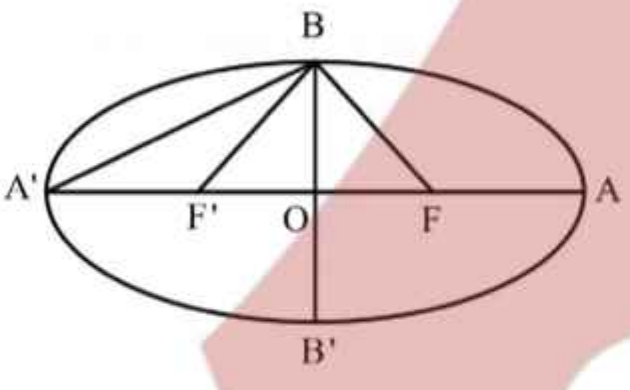
۱) یک شعاع نورانی در امتداد خط $x = ۴$ بر سهمی $x^۲ = ۸y$ می‌تابد. معادله خط بازتاب را بنویسید.

۲) معادله سهمی را بنویسید که خط هادی آن $y = -۲$ و کانون آن $F(۱, -۴)$ باشد.

۳) یک بیضی به مرکز O و کانون‌های F و F' مطابق شکل روبه‌رو مفروض است. اگر $S_{\triangle FBF'} = ۴S_{\triangle BAO}$ باشد، خروج از مرکز بیضی را به دست آورید.



۴) نقاط $B(-۱, ۲)$ و $B'(-۱, -۴)$ دو سر قطر کوچک یک بیضی با فاصله کانونی $۲\sqrt{۳}$ واحد است. طول قطر بزرگ بیضی را بیابید.

۵) معادله دایره‌ای را بنویسید که خط‌های $x + y = ۱$ و $x - y = ۳$ شامل قطرهایی از آن باشند و روی خط به معادله $x + y = ۲$ وتری به طول $۲\sqrt{۲}$ ایجاد می‌کند.

۶) وضعیت دایره به معادله $x^۲ + y^۲ - ۶x + ۱۲y + ۲۰ = ۰$، نسبت به دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات و شعاع ۳ واحد را مشخص کنید.

۷) دایره‌هایی که مرکز آنها روی سهمی به معادله $(y - ۱)^۲ = -۸(x + ۱)$ واقع است و از کانون سهمی می‌گذرند، بر خط به معادله ..... مماس هستند.

۸) دستگاه معادلات $\begin{cases} ۳x + ۷y = -۴ \\ -۵x + ۲y = -۷ \end{cases}$ را با استفاده از ماتریس وارون حل کنید.

۹) اگر $A = [a_{ij}]_{۲\times۲}$ و $|A^۳| = -۸$ باشد، حاصل $\frac{|A^{-۱}|}{|۳A|}$ را بیابید.

۱۰) اگر $A = [a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} -۱ & |i-j| > ۱ \\ ۰ & |i-j| = ۱ \\ ۱ & |i-j| < ۱ \end{cases}$ باشد، ماتریس $A^۲ - ۲I$ را به دست آورید.

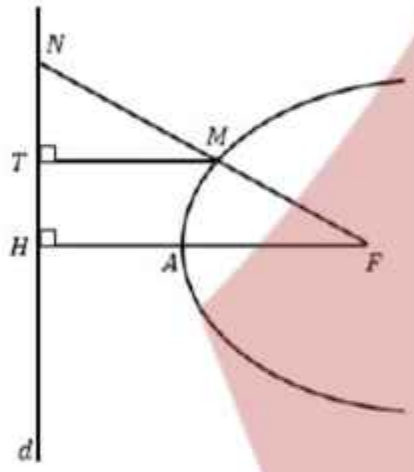
۱۱ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰, ۱)$ بوده و بر دایرهٔ $x^۲ + y^۲ - ۴x - ۶y = ۳$ مماس داخل باشد.

۱۲ فرض کنید *[خطای پردازش ریاضی]* و *[خطای پردازش ریاضی]* بردارهایی به طول ۵ هستند که با یکدیگر زاویه $\frac{\pi}{۴}$ می‌سازند. مساحت مثلثی که توسط بردارهای *[خطای پردازش ریاضی]* و $\vec{۲a}$ تولید می‌شود را بیابید.

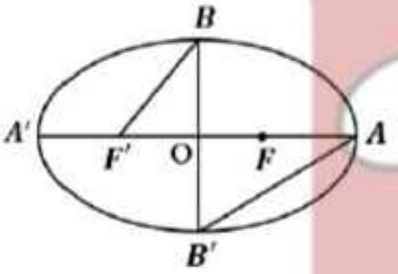
۱۳ اگر *[خطای پردازش ریاضی]* و *[خطای پردازش ریاضی]* باشند، آنگاه تصویر قائم بردار *[خطای پردازش ریاضی]* را بر امتداد بر بردار *[خطای پردازش ریاضی]* بیابید.

۱۴ در شکل مقابل، سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است. از F به نقطه دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا d را در نقطه N قطع کند و از نقطه M، MT را بر d عمود کرده‌ایم.

ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$



۱۵ در بیضی مقابل، خروج از مرکز برابر $\frac{۴}{۵}$ است. نسبت مساحت مثلث OBF به مساحت مثلث OAB را بیابید.



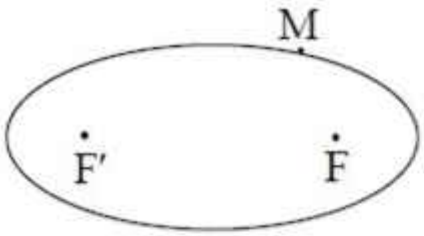
۱۶ وضعیت خط $x + y = ۳$ و دایره $x^۲ + y^۲ - ۲y - ۳ = ۰$ را تعیین کنید.

۱۷ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰, ۱)$ بوده و با دایره $(x-۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۱۶$ مماس داخل باشد.

۱۸ نقطهٔ A و خط d در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A به فاصلهٔ ۳ سانتیمتر و از d به فاصلهٔ ۴ سانتیمتر باشد. (در مورد حالت‌های مختلف جواب بحث کنید.)

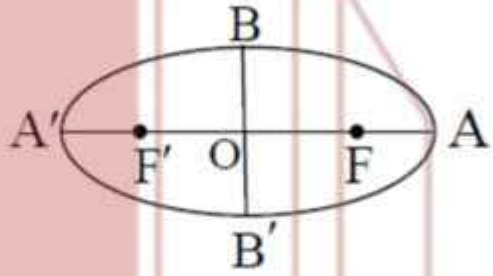
۱۹ اگر A ماتریسی ۳×۳ باشد و $|A| = -۲$، حاصل $|۲A| + |A^{-۱}|^۳$ را محاسبه کنید.

۲۰ در شکل مقابل، نقطه M روی بیضی با کانون‌های F و F' مشخص شده است. خط d را به گونه‌ای رسم کنید که در نقطه M بر بیضی مماس باشد و سپس از نقطه F' خطی موازی با MF رسم کنید تا خط d را در نقطه‌ای مانند N قطع کند.
ثابت کنید $NF' = MF'$.



۲۱ معادله سهمی با کانون $F(۱, ۲)$ و خط هادی $x = -۳$ را بنویسید.

۲۲ در یک بیضی با کانون‌های F و F'، طول قطر کوچک نصف طول قطر بزرگ است. اندازه زاویه *[خطای پردازش ریاضی]* را به دست آورید.



۲۳ وضعیت دو دایره به معادلات $(x-۱)^۲ + (y+۲)^۲ = ۱$ و $x^۲ + y^۲ + ۶x + ۲y - ۶ = ۰$ را نسبت به هم تعیین کنید. (با ارائه راه‌حل)

۲۴ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۰, ۱)$ بوده و روی خط $۳x + ۴y + ۶ = ۰$ وتری به طول $۲\sqrt{۵}$ جدا کند. سپس محل تلاقی آن دایره با محور yها را بیابید.

۲۵ نقاط A، B، C و D در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد. (بحث کنید)

۲۶ اگر $A = \begin{bmatrix} |A| & -۵ \\ ۱ & ۴|A| \end{bmatrix}$ باشد، مقدار $|A^{-۱}|$ را محاسبه کنید.

۲۷ در تساوی $\begin{bmatrix} x \\ ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۰ \\ -۲ & -۳ \end{bmatrix}[x \;\; ۱] = ۰$، مقدار x را بیابید.

۲۸ جای خالی را با واژه مناسب کامل کنید.
اگر در ماتریس قطری تمام درایه‌های روی قطر اصلی با هم برابر باشند، آن را ماتریس ..... می‌نامند.

۲۹ نقطه A به ارتفاع ۳ روی محور zها و نقطه $B(۱, ۰, ۱)$ در فضا مفروض‌اند. فاصله مختصات وسط AB تا مبدأ مختصات را حساب کنید.

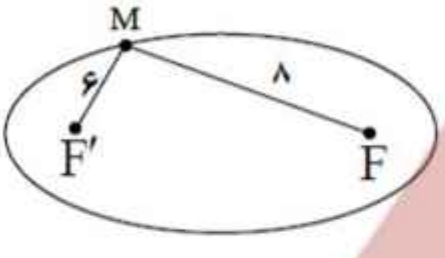
۳۰ در فضای سه‌بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = ۲ \\ y = ۱ \end{cases}$ خطی موازی محور ..... است.

۳۱ شکل کلی (نمودار) مربوط به روابط $x > -۲, x \leq ۰$ و $y^۲ + x$ را در فضای دو بعدی رسم کنید.

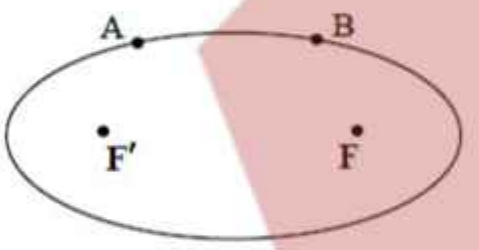
۳۲ سهمی با رأس $A(۱, ۲)$ و کانون $F(۱, -۲)$ مفروض است. معادله سهمی و خط هادی آن را بنویسید.

۳۳ اگر اندازه گودی (عمق) یک دیش مخابراتی دو برابر شود، فاصله کانونی این دیش چه تغییری می‌کند؟ (با ارائه راه‌حل)

۳۴ در شکل روبه‌رو نقطه M روی بیضی با کانون‌های F و F' قرار دارد، به طوری که $MF = ۸$ و $MF' = ۶$. اگر خروج از مرکز بیضی $\frac{۱}{۷}$ باشد، اندازه نصف قطر کوچک بیضی را به دست آورید.



۳۵ در شکل روبه‌رو دو نقطه A و B روی بیضی با کانون‌های F و F' قرار دارند. اگر $BF = AF'$ و همچنین AF و BF' یکدیگر را درون بیضی در نقطه‌ای مانند M قطع کنند، نشان دهید: مثلث FMF' متساوی‌الساقین است و M روی قطر کوچک بیضی قرار دارد.



۳۶ مقدار c را چنان بیابید که دایره $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y + c = ۰$ بر دایره $(x+۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۲$ مماس بیرون باشد.

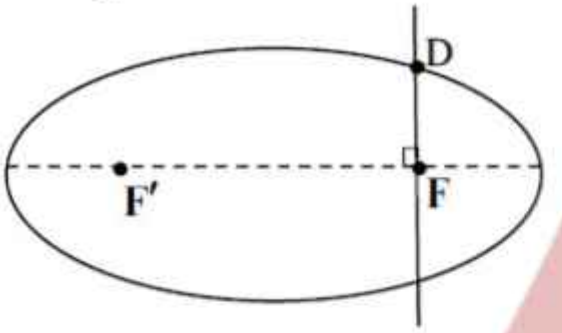
۳۷ معادلهٔ صفحه‌ای که بر محور zها در نقطه به مختصات $A = (۰, ۰, ۳)$ عمود باشد، به صورت ..... است.

۳۸ مختصات نقاط برخورد سهمی $y^۲ + ۷x + ۵ = ۰$ و دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۲۵$ را به دست آورید.

۳۹ معادلهٔ سهمی را بنویسید که $F(-۳, ۲)$ مختصات کانون و معادله خط هادی آن $x = ۱$ باشد.

۴۰ بیضی با قطر بزرگ $2a$، قطر کوچک $2b$ و کانون‌های F و F' مطابق شکل روبه‌رو مفروض است. اگر خطی در کانون F بر قطر کانونی عمود باشد و بیضی را در نقطه D قطع کند، ثابت کنید:

$$DF = \frac{b^2}{a}$$



۴۱ در یک بیضی مختصات کانون‌ها $F(4, 0)$ و $F'(-4, 0)$ و طول قطر بزرگ برابر با ۱۰ است. اگر نقطه $P(1, m)$ روی این بیضی قرار داشته باشد، مقدار m را بیابید.

۴۲ در دایره به معادلهٔ ضمنی $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ با استفاده از روش مربع کامل، ثابت کنید شعاع دایره برابر با $r = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}}{2}$ است.

۴۳ معادلهٔ دایره‌ای را بنویسید که $O(2, -1)$ مرکز آن بوده و از خط $3x - 4y + 10 = 0$ وتری به طول ۶ جدا کند.

۴۴ مکان هندسی مرکز همه دایره‌های با شعاع ثابت یک، که بر دایره $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 16$ مماس خارج باشند، دایره‌ای به مرکز $O(1, -2)$ و شعاع ..... است.

۴۵ اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$، حاصل $\left|-\frac{1}{2}A^4\right|$ را به دست آورید.

۴۶ اگر $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$، نشان دهید: $(5A)^{-1} = \frac{1}{5}A^{-1}$

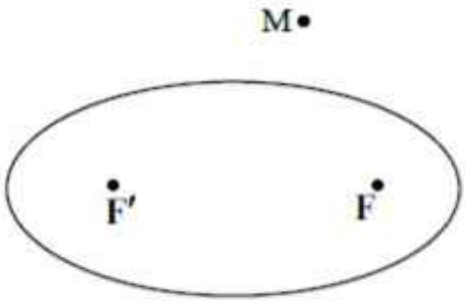
۴۷ حجم متوازی‌السطوحی را به دست آورید که توسط سه بردار *[خطای پردازش ریاضی]* و *[خطای پردازش ریاضی]* و *[خطای پردازش ریاضی]* تولید می‌شود.

۴۸ در فضای سه بعدی، نمودار مربوط به معادلات $\begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$، معادله محور ..... است.

۴۹ الف) معادله سهمی را بنویسید که $A(2, 3)$ رأس آن بوده و معادله خط هادی آن $x = 3$ باشد.
ب) مختصات کانون سهمی را بیابید.
پ) مختصات نقطه برخورد سهمی با محور طولها را حساب کنید.

۵۰ اگر در یک بیضی طول AA' (قطر بزرگ) برابر با ۱۶ و خروج از مرکز $\frac{۳}{۴}$ باشد، فاصله رأس A تا نزدیک‌ترین کانون را به دست آورید.

۵۱ اگر M نقطه‌ای بیرون بیضی باشد، ثابت کنید مجموع فواصل نقطه M از کانونهای F و F' بزرگتر از طول قطر بزرگ بیضی است.



۵۲ دو نقطه A و B و خط d که شامل هیچ یک نیست در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله بوده و از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد.

۵۳ سهمی، مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که از یک خط ثابت در آن صفحه و یک نقطه ثابت غیرواقع بر آن خط در آن صفحه به یک فاصله باشد. (درست - نادرست)

۵۴ اگر صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود نباشد و با مولد موازی نباشد و فقط یکی از دو نیمه سطح مخروطی را قطع کند، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک ..... است.

۵۵ اگر $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & -۱ \end{bmatrix}$ باشد، حاصل $|A|\,A|$ را بیابید.

۵۶ اگر دو ماتریس مربعی A و B به صورت $A = [۳i - ۲j]_{۳\times۳}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۳ \\ ۱ & ۲ & ۰ \\ -۱ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ باشند:

الف) ماتریس A را به صورت آرایش مستطیلی بنویسید.

ب) ماتریس $B^۲$ را محاسبه کنید.

۵۷ اگر $A = \begin{bmatrix} ۲ & m+۱ \\ ۲n+۴ & ۵ \end{bmatrix}$ یک ماتریس قطری باشد، با محاسبه m و n ماتریس $A + I$ را بیابید. (I ماتریس همانی مرتبه دو است).

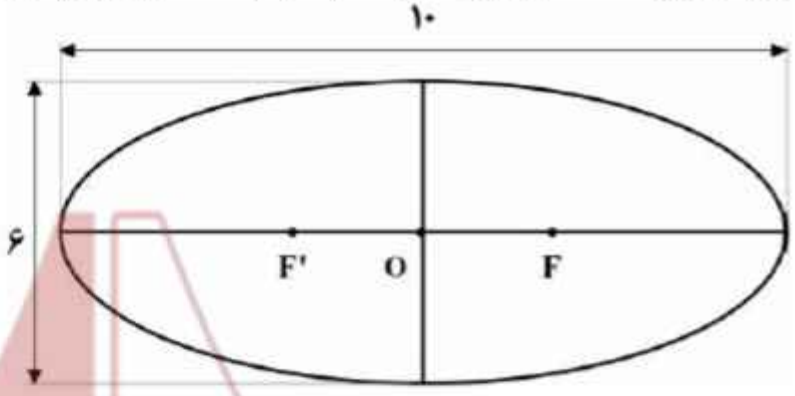
۵۸ معادله گسترده دایرهٔ $C(O, R)$ به شکل $x^۲ + y^۲ + ۲y - ۴x - ۴ = ۰$ است.

الف) مختصات مرکز و شعاع دایره C را محاسبه کنید.

ب) آیا نقطه $A(۰, ۳)$ روی محیط دایره C قرار دارد؟ چرا؟

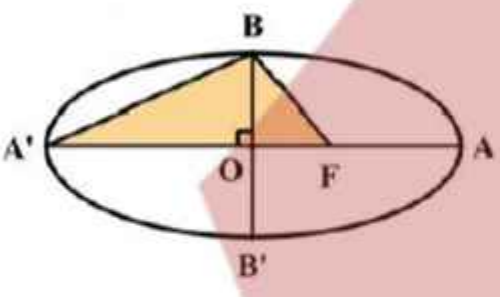
۵۹ اگر دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۲x-۱ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۵ & ۳ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix}$ مساوی باشند، آنگاه مقدار x برابر با ..... است.

۶۰ در بیضی زیر فاصله کانونی را محاسبه کنید. (F و F' کانون‌های بیضی هستند.)



۶۱ معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $(۴, ۱)$ و بر خط $۳x + ۴y = -۱$ مماس باشد.

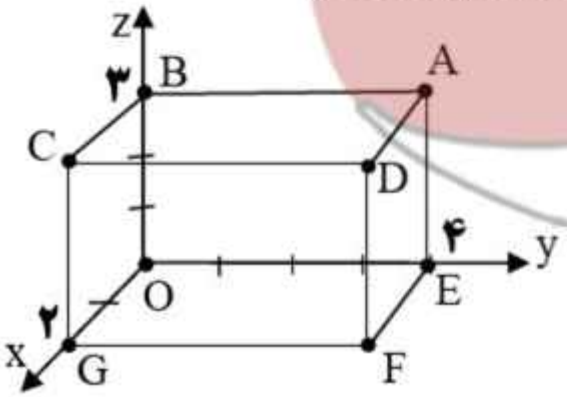
۶۲ اگر طول قطر بزرگ AA' و قطر کوچک BB' بیضی مقابل به‌ترتیب ۱۰ و ۸ باشد:
الف) مقدار $A'F$ را به دست آورید. (F کانون بیضی است)
ب) مساحت مثلث هاشورخورده ($\triangle BFA'$) چقدر است؟



۶۳ در جای خالی عبارت ریاضی مناسب قرار دهید.
- خروج از مرکز بیضی با قطر بزرگ ۸ و فاصله کانونی ۶ برابر ..... است.

۶۴ اگر $A = (۲, -۱, ۳)$ و $B = (۳, ۱, ۴)$ و $C = (-۱, ۱, ۰)$ سه رأس مثلث ABC باشند، مساحت مثلث ABC را با استفاده از ضرب خارجی بردارها به دست آورید.

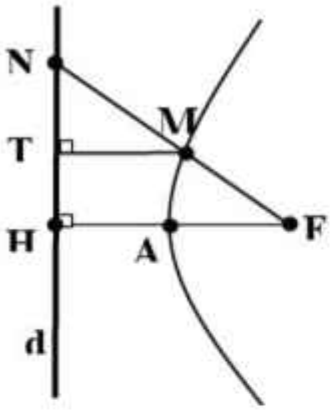
۶۵ با توجه به شکل، به سؤالات زیر پاسخ دهید.
الف) نام وجهی از شکل که معادله آن به صورت زیر مشخص شده را بنویسید.
$x = ۲, ۰ \le y \le ۴, ۰ \le z \le ۳$
ب) معادلات مربوط به پاره‌خط (یال) AD را بنویسید.
پ) مختصات نقطه D را بنویسید.
ت) معادله صفحه‌ای را بنویسید که موازی با صفحه xoz باشد و مکعب مستطیل را نصف کند.



۶۶ شکل کلی (نمودار) مربوط به رابطه $x^{۲} \leq y \leq ۲$ را رسم کنید.

۶۷ در شکل روبرو سهمی با رأس A و کانون F و خط هادی d رسم شده است، از کانون F به نقطهٔ دلخواه M روی سهمی وصل کرده و امتداد داده‌ایم تا خط d را در N قطع کند و از نقطهٔ M، MT را بر d عمود کرده‌ایم.

ثابت کنید: $\frac{FN}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$



۶۸ الف) معادله متعارف و فاصله کانونی سهمی به معادلهٔ $y^{۲} - ۲y - ۸x + ۹ = ۰$ را بیابید.
ب) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.

۶۹ در یک بیضی افقی به مرکز مبدأ مختصات طول قطرها برابر ۱۰ و ۶ است،
الف) خروج از مرکز بیضی را بیابید.
ب) مختصات کانون‌ها (F', F)، مختصات دوسر قطر بزرگ (A', A) و دوسر قطر کوچک (B', B) را به دست آورید.
پ) بیضی را روی محور مختصات رسم کنید.

۷۰ نقاط A, B و C در صفحه مفروض‌اند. نقطه‌ای بیابید که از A و B به یک فاصله و از C به فاصله ۳ سانتی‌متر باشد (بحث کنید).

۷۱ عبارت زیر را کامل کنید.
- نقطه $A(۱, -۲)$ در ..... دایره به معادله $x^{۲} + y^{۲} - ۲x + ۲y = ۰$ قرار دارد.

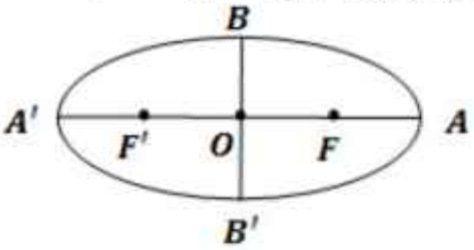
۷۲ عبارت زیر را کامل کنید.
- اگر در بیضی خروج از مرکز به عدد صفر نزدیک شود کشیدگی بیضی کمتر شده و بیضی به ..... نزدیکتر می‌شود.

۷۳ معادله دایره‌ای بنویسید که مرکز آن $(۳, ۰)$ و بر خط $۳x - ۴y = ۳$ مماس باشد.

۷۴ اگر طول و عرض و ارتفاع اتاقی ۴ متر و ۵ متر و ۳ متر باشد طول قطر اتاق که دو نقطه مقابل را به هم وصل می‌کند را به دست آورید.

۷۵ سهمی $y^{۲} = ۲x + ۴y$ را درنظر بگیرید.
الف) مختصات رأس، کانون و خط هادی سهمی را به دست آورید.
ب) نقاط برخورد سهمی با محورهای مختصات را به دست آورید.

۷۶ اگر در بیضی طول قطر بزرگ دو برابر طول قطر کوچک باشد، اندازه زاویه *[خطای پردازش ریاضی]* چند درجه است؟



۷۷ در نقطه $A(۲, ۳)$ روی دایره به معادله $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y = ۳$ مماسی بر دایره رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.

۷۸ معادله دایره‌ای را بنویسید که مرکز آن $O(۲, ۳)$ بوده و $M(۱, ۱)$ یک نقطه از آن باشد.

۷۹ اگر ماتریس A را ماتریس ضرایب و X را ماتریس مجهولات و B را ماتریس معلومات دستگاه دو معادله و دو مجهولی $\begin{cases} ۲x - y = ۴ \\ -۴x + ۳y = ۲ \end{cases}$ درنظر بگیریم، از تساوی $AX = B$ ماتریس X را به دست آورید.

۸۰ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.
الف) هر آرایش مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعداد سطر و ستون ..... نامیده می‌شود.
ب) مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آن‌ها یک ویژگی ..... داشته باشند و هم‌چنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.
پ) اگر مجموع فواصل نقطه A از دو کانون بیضی بیش‌تر از طول قطر بزرگ بیضی باشد، نقطه A در ..... بیضی است.
ت) اگر برای دو بردار *[خطای پردازش ریاضی]* و *[خطای پردازش ریاضی]* داشته باشیم: *[خطای پردازش ریاضی]*، در این صورت زاویه بین دو بردار *[خطای پردازش ریاضی]* و *[خطای پردازش ریاضی]* برابر ..... است.

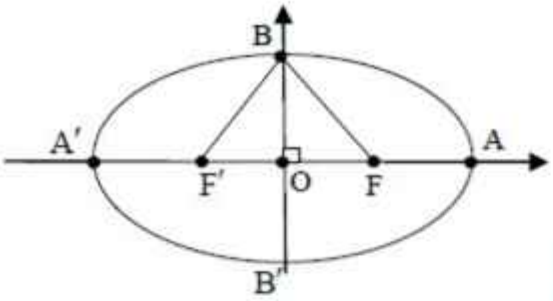
۸۱ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.
الف) اگر A و B دو ماتریس ۲×۲ باشند آن‌گاه: $|AB| = |A|\,|B|$
ب) در حالتی که صفحه‌ی P بر محور سطح مخروطی (l) عمود باشد و از رأس آن عبور نکند، فصل مشترک حاصل یک دایره خواهد بود.
پ) در حالتی‌که خروج از مرکز بیضی برابر صفر باشد بیضی تبدیل به یک پاره‌خط می‌شود.
ت) نقطه با مختصات $(-۴, ۳, -۲)$ در ناحیه (کنج) شماره ۵ محورهای مختصات سه بعدی واقع است.

۸۲ در یک بیضی افقی، طول قطر بزرگ ۶ و قطر کوچک ۴ واحد است. اگر مرکز این بیضی نقطه‌ای با مختصات $(۵, ۴)$ باشد:
الف) فاصله کانونی بیضی را پیدا کنید. ب) مختصات نقاط دو سر قطر بزرگ را بنویسید.

۸۳ نقطه A به طول ۲ روی محور xها و نقطه B روی صفحه xoz به طول۱ و ارتفاع ۳ در فضای سه‌بعدی مفروض‌اند.
الف) مختصات نقاط A و B را مشخص کنید.
ب) طول پاره‌خط AB را محاسبه کنید.
پ) مختصات وسط پاره‌خط AB را به دست آورید.

۸۴ سهمی به معادله‌ی $y^۲ - ۲y + ۸x + ۹ = ۰$ را درنظر بگیرید:
الف) مختصات رأس، کانون و معادله خط هادی سهمی را به دست آورید.
ب) نمودار سهمی را رسم کنید.

۸۵ در بیضی مقابل، طول قطر کوچک $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ طول قطر بزرگ است. اندازه زاویه $F'BF$ را به دست آورید.



۸۶ در نقطه $A(۲, ۳)$ روی دایره‌ی $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y = ۳$ مماسی بر آن رسم کرده‌ایم، معادله این خط مماس را به دست آورید.

۸۷ مقدار m را طوری بیابید که دستگاه معادلات خطی $\begin{cases} ۲x + my = ۱ \\ (m-۱)x + y = ۳ \end{cases}$ جواب نداشته باشد.

۸۸ اگر $A = \begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد مقادیر a و b را طوری به دست آورید که حاصل‌ضرب $A \times B$ ماتریس قطری باشد.

۸۹ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) اگر A و B دو ماتریس ۳×۳ دلخواه باشند آن‌گاه عبارت $(A+B)^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲$ همواره برقرار است.

ب) اگر صفحه‌ی P به گونه‌ای باشد که هر دو تکه‌ی بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور باشد، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک هذلولی است.

پ) نقطه $(-۲, ۳)$ روی دایره $x^۲ + y^۲ + ۲x = ۰$ قرار دارد.

ت) برای سه بردار *[خطای پردازش ریاضی]* و *[خطای پردازش ریاضی]* و *[خطای پردازش ریاضی]* به طول‌های واحد روی محورهای مختصات در $R^۳$، داریم: *[خطای پردازش ریاضی]*.

۹۰ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.

الف) ماتریس مربعی که همه درایه‌های غیر واقع بر قطراصلی آن صفر باشند را ماتریس ..... گویند.

ب) مکان هندسی، مجموعه‌ی نقاطی از صفحه (یا فضا) است که همه‌ی آن‌ها یک ویژگی ..... داشته باشند و هم‌چنین هر نقطه که آن ویژگی را داشته باشد عضو این مجموعه باشد.

پ) در حالتی که $\frac{c}{a} = ۱$ بیضی به یک ..... تبدیل می‌شود.

ت) بردار *[خطای پردازش ریاضی]* در فضا سه بعدی بر صفحه‌ی مختصات سه بعدی ..... منطبق است.

(xoz, yoz, xoy)

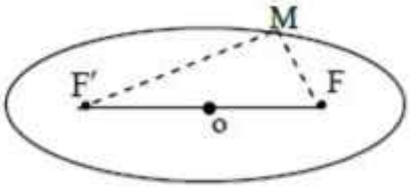
۹۱ در فضای $R^۳$، نقطه A به عرض ۲ و ارتفاع ۳ روی صفحه yoz و نقطه $B = (-۴, ۶, -۳)$ مفروض‌اند مختصات وسط AB را بیابید.

۹۲ معادلات $\begin{cases} x = ۰ \\ y = ۰ \end{cases}$ مربوط به کدام محور در دستگاه مختصات $R^۳$ است؟

۹۳ اگر $y = b$ معادله‌ی صفحه‌ای در فضای $R^۳$ باشد که از نقطه $A = (۲, -۳, ۴)$ بگذرد، مقدار عددی b چه‌قدر است؟

۹۴ در یک دیش مخابراتی به شکل سهموی با دهانه دایره‌ای به قطر ۶۰ واحد و گودی (عمق) ۹ واحد مفروض است فاصله کانونی این دیش را به دست آورید.

۹۵ نقطه M روی بیضی به اقطار ۱۰ و ۶ واحد به گونه‌ای قرار دارد، که فاصله آن تا مرکز بیضی برابر ۴ واحد است.
الف) نشان دهید مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.
ب) طول MF را به دست آورید.
(F, F' کانون‌های بیضی هستند و $MF < MF'$).



۹۶ وضعیت دایره $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$ با دایره‌ای به مرکز مبدا مختصات و شعاع یک را نسبت به هم مشخص کنید.

۹۷ درستی و نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.
الف) اگر A و B دو ماتریس هم مرتبه و r یک عدد حقیقی دلخواه و مخالف صفر باشد، و $rA = rB$ آن‌گاه داریم: $A = B$.
ب) مکان هندسی مرکزهای همه‌ی دایره‌هایی در صفحه که بر خط d در نقطه‌ی ثابت A مماس‌اند، یک نیم‌خط عمود بر خط d در نقطه‌ی A است.
پ) در یک سهمی، هر شعاع نوری که موازی با محور سهمی به بدنه سهمی بتابد، بازتاب آن از کانون سهمی خواهد گذشت.
ت) اگر زاویه بین دو بردار مخالف صفر، منفرجه باشد، آن‌گاه ضرب داخلی آن‌ها یک عدد حقیقی مثبت است.

۹۸ جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید.
الف) اگر ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ اسکالر باشد، حاصل دترمینان ماتریس برابر ..... است.
ب) اگر صفحه‌ی P با مولد (d) موازی باشد و از رأس سطح مخروطی عبور کند، در این صورت فصل مشترک صفحه P و سطح مخروطی یک ..... است.
پ) در بیضی، در حالتی که $\frac{c}{a} = 0$ بیضی به ..... تبدیل می‌شود.
ت) در فضای R^3، نقطه $(-3, 2, -5)$ در ناحیه (کنج) ..... دستگاه مختصات قرار دارد.

۹۹ وضعیت دو دایره $(x-1)^2 + y^2 = 1$ و $x^2 + (y-1)^2 = 1$ را نسبت به هم مشخص کنید.

۱۰۰ معادله دایره‌ای را بنویسید که خطوط $x + y = 1$ و $x - y = 3$ شامل قطرهایی از آن بوده و خط $4x + 3y = -5$ بر آن مماس باشد.

۱ $(x=۴ \Rightarrow y=۲) \Rightarrow A(۳,۲)$

خط بازتاب از کانون می‌گذرد. $(۴a=۸ \Rightarrow a=۲) \Rightarrow F(۰,۲), y=۲$

۲ $S=(۱,-۳), a=۱ \Rightarrow (x-۱)^۲=-۴(y+۳)$

۳ $$\frac{S_{FBF'}}{S_{BAO}}=\frac{\frac{۱}{۲}\times ۲c\times b}{\frac{۱}{۲}\times a\times b}=\frac{۱}{۴} \Rightarrow \frac{c}{a}=\frac{۱}{۸}$$

۴ $BB'=۲b=۶ \Rightarrow b=۳, ۲c=۲\sqrt{۳} \Rightarrow c=\sqrt{۳}$

$a^۲=b^۲+c^۲=۳^۲+(\sqrt{۳})^۲=۱۲ \Rightarrow a=۲\sqrt{۳} \Rightarrow AA'=۲a=۴\sqrt{۳}$

۵ $$\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \Rightarrow O(۲,-۱) \Rightarrow OH=\frac{۱}{\sqrt{۲}}, r^۲=(\frac{۱}{\sqrt{۲}})^۲+(\sqrt{۲})^۲=\frac{۵}{۲}$$

$$(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=\frac{۵}{۲}$$

۶ $O(۳,-۶), R=۵$

$O'(۰,۰), R'=۳$

$OO'=۳\sqrt{۵}, |R-R'|<OO'<R+R' \Rightarrow$ دو دایره متقاطع هستند

۷ $x=۱$

۸ $$X=A^{-۱}B \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\frac{۱}{۴۱}\begin{bmatrix} ۲ & -۷ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۴ \\ -۷ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ -۱ \end{bmatrix}$$

۹ $$|A^۳|=|A|^۳=-۸ \Rightarrow |A|=-۲, \frac{|A^{-۱}|}{|۳A|}=\frac{\frac{۱}{|A|}}{۳^۳|A|}=\frac{۱}{۳۶}$$

۱۰ $$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & -۱ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۱ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow A^۲=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}, A^۲-۲I=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & -۲ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & -۲ \\ ۰ & -۱ & ۰ \\ -۲ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

۱۱ اگر دو دایره مماس داخل باشند، باید $OO'=|r-r'|$ باشد.

$x^۲+y^۲-۴x-۶y=۳ \Rightarrow x^۲-۴x+۴-۴+y^۲-۶y+۹-۹=۳$

$\Rightarrow (x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۱۶ \Rightarrow O'(۲,۳), r'=۴$

$OO'=\sqrt{(۲-۰)^۲+(۳-۱)^۲}=\sqrt{۴+۴}=۲\sqrt{۲}$

$OO'=|r-r'| \Rightarrow ۲\sqrt{۲}=|r-۴| \Rightarrow r-۴=\pm ۲\sqrt{۲} \Rightarrow r=۲\sqrt{۲}+۴$ یا $r=-۲\sqrt{۲}+۴$

$(x-۰)^۲+(y-۱)^۲=(۲\sqrt{۲}+۴)^۲ \Rightarrow x^۲+y^۲-۲y-۲۳-۱۶\sqrt{۲}=۰$

$(x-۰)^۲+(y-۱)^۲=(۴-۲\sqrt{۲})^۲ \Rightarrow x^۲+y^۲-۲y-۲۳+۱۶\sqrt{۲}=۰$

۱۲ (ص ۸۴) [خطای پردازش ریاضی]

[خطای پردازش ریاضی]

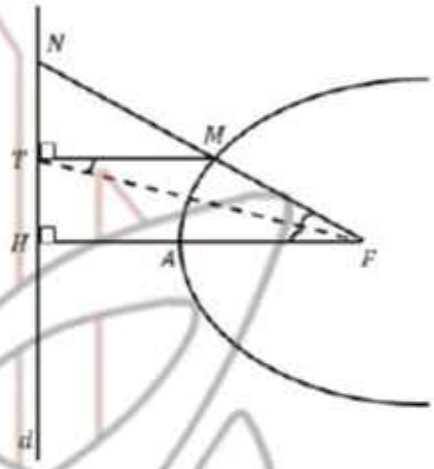
۱۳ (ص ۸۴) [خطای پردازش ریاضی]

[خطای پردازش ریاضی]

۱۴ بنا به تعریف سهمی $MT = MF$ و لذا مثلث MFT متساوی‌الساقین است پس $\hat{MFT} = \hat{MFT}$ از طرفی $FH \parallel MT$ و FT خط مورب می‌باشد پس بنابر قضیهٔ خطوط موازی و مورب $\hat{MTF} = \hat{TFH}$ از دو رابطهٔ اخیر نتیجه می‌شود که TF نیمساز زاویهٔ $\hat{NFH}$ می‌باشد.

با استفاده از قضیهٔ نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{NF}{FH} = \frac{NH}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{۲FA} = \frac{NT}{TH} \Rightarrow \frac{NF}{FA} = \frac{۲NT}{TH}$$



۱۵
$$\frac{c}{a} = \frac{۴}{۵}$$

$$\frac{S_{\Delta OBF'}}{S_{\Delta OAB}} = \frac{\frac{۱}{۲}OB \times OF'}{\frac{۱}{۲}OB \times OA} = \frac{\frac{۱}{۲}bc}{\frac{۱}{۲}ba} = \frac{c}{a} = \frac{۴}{۵}$$

۱۶ روش اول: (ص ۴۵)

$$x + y = ۳ \Rightarrow y = ۳ - x$$

$$x^۲ + y^۲ - ۲y - ۳ = ۰ \Rightarrow x^۲ + (۳-x)^۲ - ۲(۳-x) - ۳ = ۰$$

$$۲x^۲ - ۴x = ۰$$

دلتای معادلهٔ اخیر مثبت است بنابراین دو ریشه متمایز دارد که طول نقاط تقاطع است. پس خط و دایره متقاطع‌اند.

روش دوم:

$$x^۲ + y^۲ - y - ۳ = ۰ \Rightarrow O(۰, ۱), r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴ + ۱۲} = ۲$$

$$OH = \frac{|۰+۱-۳|}{\sqrt{۱+۱}} = \sqrt{۲} \quad \Big\} \Rightarrow \sqrt{۲} < ۲ \Rightarrow OH < r$$

پس خط و دایره متقاطعند.

۱۷ $(x-۲)^۲+(y-۳)^۲=۱۶ \Rightarrow O'(۲,۳), r'=۴$ (ص ۴۴)

$d=OO'=\sqrt{(۰-۲)^۲+(۱-۳)^۲}=\sqrt{۸}$

$|r-r'|=d \Rightarrow |r-۴|=\sqrt{۸} \Rightarrow r=۴\pm ۲\sqrt{۲}$

$(x-۰)^۲+(y-۱)^۲=(۴\pm ۲\sqrt{۲})^۲$

۱۸ مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ثابت ۳ سانتی‌متر هستند، دایره‌ای به مرکز A و شعاع ۳ سانتی‌متر است. مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشند، دو خط موازی با d و در طرفین خط d است. اشتراک این دو مکان هندسی را درنظر می‌گیریم.

اگر دایره دو خط موازی را قطع نکند، جوابی نخواهد داشت.

اگر دایره بر یکی از خطوط موازی مماس باشد، یک جواب دارد.

اگر دایره یکی از دو خط موازی را قطع کند دو جواب خواهد داشت. (ص ۳۹)

۱۹ $|۲A|+|A^{-۱}|^۳=۲^۳|A|+\frac{۱}{|A|^۳}=۸(-۲)+\frac{۱}{-۸}=\frac{-۱۲۹}{۸}$ (ص ۳۱)

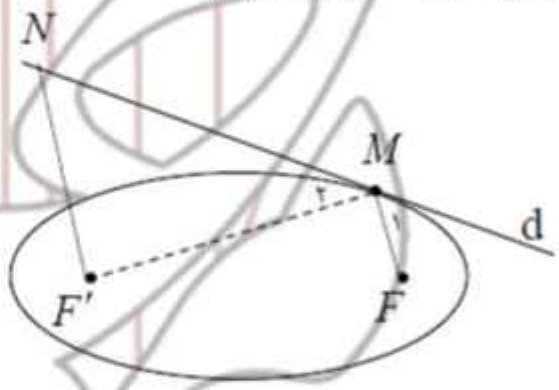
۲۰ مجموع $MF+MF'$ کم‌ترین مقدار است بنا به خاصیت کوتاه‌ترین مسیر، زاویه‌های *[خطای پردازش ریاضی]*

از طرفی: $NF' \parallel MF$ و d مورب، در نتیجه *[خطای پردازش ریاضی]*

نتیجه می‌شود *[خطای پردازش ریاضی]*

مثلث MNF' متساوی‌الساقین است.

یعنی $MF'=NF'$. (ص ۵۷)



۲۱ $F(\alpha+a,\beta)=(۱,۲) \Rightarrow \begin{cases}\alpha+a=۱\\ \beta=۲\end{cases}$ (ص ۵۲ و ۵۸)

$\left.\begin{matrix}x=\alpha-a\\ x=-۳\end{matrix}\right\} \Rightarrow \alpha-a=-۳ \xrightarrow{\alpha+a=۱} \begin{cases}a=۲\\ \alpha=-۱\end{cases}$

$(y-۲)^۲=۸(x+۱)$

روش دوم: برای حل مسأله با استفاده از شکل، نمره لحاظ گردد.

۲۲ $BB'=\frac{۱}{۲}AA' \Rightarrow ۲b=\frac{۱}{۲}(۲a) \Rightarrow a=۲b$

[خطای پردازش ریاضی]

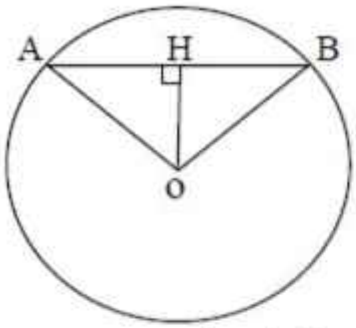
روش دوم: برای حل مسأله با استفاده از تانژانت زاویه *[خطای پردازش ریاضی]* نمره لحاظ گردد. (ص ۵۸)

۲۳ $(x-1)^2+(y+2)^2=1 \Rightarrow O(1,-2), R=1$

$x^2+y^2+6x+2y-6=0 \Rightarrow O'(-3,-1), R'=4, d=OO'=\sqrt{17}$

بنابراین دو دایره متقاطع هستند. $5 > \sqrt{17} > 3$ (ص ۴۶)

۲۴



$OH=\frac{|3(0)+4(1)-4|}{\sqrt{9+16}}=2$

$AB=2\sqrt{5} \Rightarrow AH=\sqrt{5} \Rightarrow R=3$

$(x-0)^2+(y-1)^2=9$

$x=0 \Rightarrow \begin{cases} y=4 \Rightarrow (0,4) \\ y=-2 \Rightarrow (0,-2) \end{cases}$ (ص ۴۴)

۲۵ مکان هندسی نقاطی که از نقاط A و B به یک فاصله‌اند: عمودمنصف پاره‌خط AB است.

مکان هندسی نقاطی که از نقاط C و D به یک فاصله‌اند: عمودمنصف پاره‌خط CD است.

محل برخورد دو عمودمنصف، جواب مسأله است.

حالت‌های ممکن: یک جواب، بدون جواب، بی‌شمار جواب. (ص ۳۹)

۲۶ $|3A|=4|A|^2+5 \Rightarrow 4|A|^2-9|A|+5=0 \Rightarrow \begin{cases} |A|=1 \Rightarrow |A^{-1}|=1 \\ |A|=\frac{5}{4} \Rightarrow |A^{-1}|=\frac{4}{5} \end{cases}$ (ص ۳۰ و ۳۱)

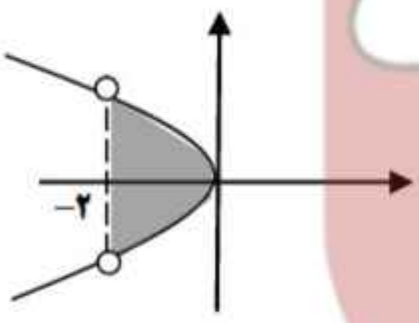
۲۷ $[x-2 \quad -3]\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}=0 \Rightarrow x^2-2x-3=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$ (ص ۱۷)

۲۸ اسکالر (ص ۱۲)

۲۹ مختصات نقطه $A(0,0,3)$، مختصات وسط AB برابر با $M(\frac{1}{2},0,2)$ و فاصله تا مبدأ مختصات $\frac{\sqrt{17}}{2}$ است. (ص ۶۶)

۳۰ zها (ص ۶۷)

۳۱



(ص ۶۳)

۳۲ با توجه به جایگاه کانون و معادله خط هادی، سهمی قائم و دهانه آن به سمت پایین می‌باشد.

فاصله کانونی سهمی برابر با $a = AF = ۴$ است.

معادله آن برابر است با: $(x-۱)^۲ = -۱۶(y-۲)$

معادله خط هادی سهمی $y = ۶$ است. (ص ۵۸)

۳۳ $\frac{a'}{a} = \frac{\frac{b^۲}{۴(۲h)}}{\frac{b^۲}{۴h}} = \frac{۱}{۲}$ نصف می‌شود. (ص ۵۹)

۳۴ نقطه M روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی:

$MF + MF' = ۲a = ۱۴ \Rightarrow a = ۷$

$\frac{c}{a} = \frac{۱}{۷} \xrightarrow{a=۷} c = ۱$

$a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow b = ۴\sqrt{۳}$ (ص ۵۸)

۳۵ نقاط A و B روی بیضی قرار دارد، با توجه به تعریف بیضی:

$AF + AF' = ۲a = BF + BF' \xrightarrow{AF'=BF} AF = BF'$

دو مثلث AFF' و BFF' بنا به حالت $(AF = BF', AF' = BF, FF' = FF')$ برابری سه ضلع همنهشت هستند، نتیجه دو زاویه *[خطای پردازش ریاضی]*، مثلث MFF' متساوی‌الساقین است و $MF = MF'$ یعنی M روی عمودمنصف پاره‌خط AFF' (قطر کوچک بیضی) است.

۳۶ $(x+۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۲ \Rightarrow O'(-۱, ۱), r' = \sqrt{۲}$

$(x-۱)^۲ + (y+۱)^۲ = ۲ - c \Rightarrow O(۱, -۱), r = \sqrt{۲-c}$

$OO' = ۲\sqrt{۲}$

$OO' = r + r' \Rightarrow ۲\sqrt{۲} = \sqrt{۲} + \sqrt{۲-c} \Rightarrow c = ۰$ (ص ۴۳)

۳۷ $z = ۳$ (ص ۶۸)

۳۸ $\begin{cases} y^۲ + ۷x + ۵ = ۰ \\ x^۲ + y^۲ = ۲۵ \end{cases} \Rightarrow x^۲ + (-۷x - ۵) = ۲۵ \Rightarrow x^۲ - ۷x - ۳۰ = ۰$

$x = -۳, x = ۱۰$ (ص ۵۸)

$\begin{cases} x = -۳ \Rightarrow y^۲ = ۱۶ \Rightarrow y = \pm ۴ \Rightarrow (-۳, ۴), (-۳, -۴) \\ x = ۱۰ \Rightarrow y^۲ = -۷۵ \end{cases}$

۳۹ با توجه به جایگاه کانون و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانه آن به سمت چپ می‌باشد.

مختصات رأس سهمی $A(-۱, ۲)$، در این سهمی $a = AF = ۲$

معادله آن برابر است با: $(y-۲)^۲ = -۸(x+۱)$

(ص ۵۸)

۴۰ نقطه D روی بیضی قرار دارد، بنا به تعریف بیضی: $DF + DF' = ۲a$

در مثلث قائم‌الزاویه DFF' بنا به قضیه فیثاغورث داریم:

$$DF^۲ + FF'^۲ = DF'^۲ \Rightarrow DF^۲ + (۲c)^۲ = (۲a - DF)^۲$$

$$DF = \frac{a^۲ - c^۲}{a} \xrightarrow{a^۲-c^۲=b^۲} DF = \frac{b^۲}{a}$$

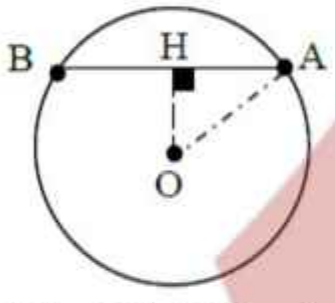
۴۱ $PF + PF' = ۲a \Rightarrow \sqrt{۹ + m^۲} + \sqrt{۹ + m^۲} = ۱۰ \Rightarrow m = \pm ۴$ (ص ۴۸)

۴۲ $x^۲ + y^۲ + ax + by + c = ۰ \Rightarrow (x^۲ + ax + \frac{a^۲}{۴}) + (y^۲ + by + \frac{b^۲}{۴}) = -c + \frac{a^۲}{۴} + \frac{b^۲}{۴}$

$$(x + \frac{a}{۲})^۲ + (y + \frac{b}{۲})^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴} \Rightarrow r^۲ = \frac{a^۲ + b^۲ - ۴c}{۴} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c}}{۲}$$

(ص ۴۱)

۴۳ از مرکز دایره بر وتر عمود می‌کنیم عمود OH وتر AB را نصف می‌کند.



$$AH = \frac{۱}{۲}AB = ۳$$

$$OH = \frac{|۳(۲) - ۴(-۱) - ۱۰|}{\sqrt{۹+۱۶}} = ۴$$

$$OA^۲ = OH^۲ + AH^۲ \Rightarrow r^۲ = (۴)^۲ + (۳)^۲ = ۲۵, (x-۲)^۲ + (y+۱)^۲ = ۲۵$$

۴۴ ۵ (ص ۳۹)

۴۵ $|A| = ۲, |-\frac{۱}{۲}A^۴| = (-\frac{۱}{۲})^۳ |A|^۴ = -۲$ (ص ۲۸ و ۳۱)

۴۶ $A^{-۱} = \frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ -۱ & ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow \frac{۱}{۵}A^{-۱} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۱۰} & -\frac{۱}{۱۰} \\ \frac{۱}{۱۰} & -\frac{۳}{۱۰} \end{bmatrix}$ (ص ۲۳ و ۳۱)

$$۵A = \begin{bmatrix} ۱۵ & -۵ \\ ۵ & -۵ \end{bmatrix} \Rightarrow (۵A)^{-۱} = \frac{۱}{-۵۰}\begin{bmatrix} -۵ & ۵ \\ -۵ & ۱۵ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۱۰} & -\frac{۱}{۱۰} \\ \frac{۱}{۱۰} & -\frac{۳}{۱۰} \end{bmatrix}$$

۴۷ *[خطای پردازش ریاضی]* (ص ۸۳)

[خطای پردازش ریاضی]

اگر دانش‌آموز به صورت زیر حل کند نمره کامل داده شود:

[خطای پردازش ریاضی]

۴۸ عرض ها یا محور yها (ص ۶۷)

۴۹ الف) با توجه به جایگاه رأس و معادله خط هادی، سهمی افقی و دهانه آن به سمت چپ می‌باشد.

در این سهمی $a = ۱$ و معادله آن برابر است با: $(y-۳)^۲ = -۴(x-۲)$

ب) مختصات کانون سهمی $F(-a+h, k) = (-۱+۲, ۳) = (۱, ۳)$

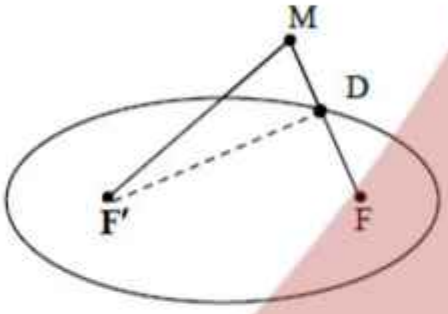
پ) مختصات محل برخورد با محور طول‌ها برابر است با:

$y = ۰ \Rightarrow x = \frac{-۱}{۴}, (\frac{-۱}{۴}, ۰)$ (ص ۵۸ و ۵۴)

۵۰ $\frac{c}{a} = \frac{۳}{۴} \xrightarrow{a=۸} c = ۶ \Rightarrow AF = a - c = ۲$ (ص ۴۹)

۵۱ از نقطه M به کانون‌های بیضی وصل می‌کنیم تا بیضی را در نقطه D قطع کند، نقطه D روی بیضی قرار دارد بنا بر تعریف بیضی: $DF + DF' = ۲a$

بنابر نامساوی مثلثی در مثلث MDF' داریم:



$$MD + MF' > DF' \xrightarrow{+DF}$$
$$DF + MD + MF' > DF + DF'$$
$$\Rightarrow MF + MF' > ۲a$$

(ص ۴۷)

۵۲ مکان هندسی نقاطی که از دو نقطه A و B به یک فاصله‌اند عمودمنصف پاره‌خط AB است این خط را رسم می‌کنیم و l می‌نامیم. مکان هندسی نقاطی که از خط d به فاصله ۳ سانتی‌متر هستند دو خط d' و d'' می‌باشند که موازی d هستند.

محل برخورد دو خط d' و d'' با خط l جواب مسأله است.

الف - اگر خط l دو خط d' و d'' را قطع کند مسئله دو جواب دارد.

ب - اگر خط l بر یکی از دو خط d' یا d'' منطبق باشد مسئله بی‌شمار جواب دارد.

پ - اگر خط l هیچ‌یک از دو خط d' و d'' را قطع نکند مسئله جواب ندارد.

رسم یک مورد شکل برای مسأله الزامی است. (ص ۳۸)

۵۳ درست (ص ۵۱)

۵۴ بیضی (ص ۳۵)

۵۵ $|A| = ۲$ (ص ۲۹ و ۳۱)

$||A|A| = |A|^۳ |A| = |A|^۴ = ۱۶$

۵۶ الف) $A = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & -۳ \\ ۴ & ۲ & ۰ \\ ۷ & ۵ & ۳ \end{bmatrix}$

ب) $B^۲ = B \times B = \begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۶ \\ -۳ & ۷ & ۶ \\ -۲ & ۲ & ۷ \end{bmatrix}$ (ص ۲۱)

۵۷ $\begin{cases} m+1=0 \\ 2n+4=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=-1 \\ n=-2 \end{cases}$

$A+I=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$ (ص ۲۱ و ۱۹)

۵۸ الف) $O(-\frac{a}{2},-\frac{b}{2})=(2,-1), R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}=3$

ب) خیر زیرا: $(0)^2+(3)^2+2(3)-4(0)-4 \neq 0$

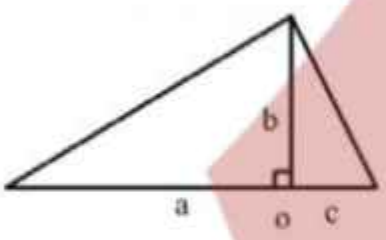
۵۹ $2x-1=5 \Rightarrow x=3$ (ص ۱۳)

۶۰ $a^2=b^2+c^2 \xrightarrow{a=5,\ b=3} c=4 \Rightarrow FF'=8$

۶۱ $r=\frac{|3\times 1+4(4)+1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=4 \Rightarrow (x-1)^2+(y-4)^2=16$

۶۲ الف) $\begin{matrix} a=5 \\ b=4 \end{matrix} \Rightarrow c^2=25-16 \Rightarrow c=3 \Rightarrow AF=8$

ب)



$S_\Delta=\frac{1}{2}(5+3)\times 4=16$

۶۳ $\frac{3}{4}$

۶۴ $\overrightarrow{AB}=(1,2,1), \overrightarrow{AC}=(-3,2,-3)$

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(-8,0,8), S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=4\sqrt{2}$ (ص ۸۴)

۶۵ الف) CDFG

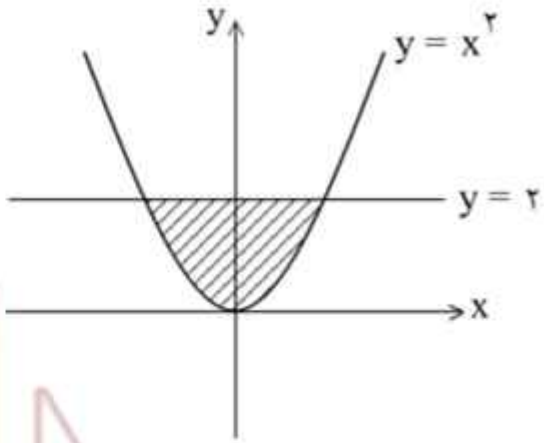
ب) $\begin{cases} 0 \leq x \leq 2 \\ y=4 \\ z=3 \end{cases}$

پ) $D(2,4,3)$

ت) $y=2$ (ص ۶۸)

۶۶ رسم نمودار (ص ۵۵)

$y = x^2$ نمودار یک سهمی است و $y \geq x^2$ داخل این سهمی است و $y \leq 2$ نقاط زیر خط $y = 2$ هستند، پس $x^2 \leq y \leq 2$ ناحیه هاشورخورده می‌باشد.



۶۷ روش اول:

بنا به تعریف سهمی $MF = MT$ مثلث MFT متساوی‌الساقین است. *[خطای پردازش ریاضی]*

از طرفی بنا به خطوط موازی $MT \parallel FH$ و مورب FT نتیجه می‌شود *[خطای پردازش ریاضی]*

از ۱ و ۲ نتیجه می‌شود TF نیمساز است. بنا به قضیه نیمساز در مثلث FHN داریم:

$$\frac{NF}{FH} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{FH=2FA} \frac{NF}{2FA} = \frac{NT}{TH} \xrightarrow{\times 2} \frac{NF}{FA} = \frac{2NT}{TH}$$ (ص ۵۸)

روش دوم:

$MT \parallel FH$ با توجه به قضیه تالس در مثلث NHF:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{NM}{MF} = \frac{NT}{TH} \\ \frac{MT}{FH} = \frac{NM}{NF} \xrightarrow{MT=MF} \frac{NF}{FH} = \frac{NM}{MF} \end{array}\right\} \xrightarrow{FH=2FA} \frac{NF}{2FA} = \frac{NT}{TH}$$

$$\xrightarrow{\times 2} \frac{NF}{FA} = \frac{2NT}{TH}$$

۶۸ الف) معادله متعارف سهمی $(x-1)^2 = 8(y-1)$ و فاصله کانونی $a = 2$

ب) رأس سهمی $(1, 1)$ معادله خط هادی $x = -1$ و مختصات کانون آن $(3, 1)$ (ص ۵۵)

۶۹

الف) $\begin{cases} 2a = 10 \Rightarrow a = 5 \\ 2b = 6 \Rightarrow b = 3 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow c = 4$

$$\frac{c}{a} = \frac{4}{5}$$

ب) $A(5, 0), A'(-5, 0)$

$F(4, 0), F'(-4, 0)$

$B(0, 3), B'(0, -3)$

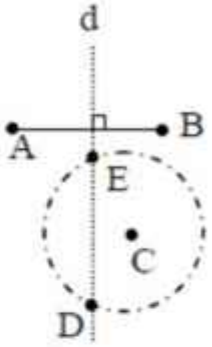
پ) رسم بیضی (ص ۴۹)

۷۰ مکان هندسی نقاطی که از A و B به یک فاصله‌اند، عمودمنصف پاره‌خط AB است. و مکان هندسی نقاطی که از نقطه C به فاصله ۳ واحد باشد، دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۳ است، بنابراین نقطه برخورد خط عمودمنصف d و دایره جواب مسئله است. (نقاط D و E)

الف) اگر خط عمودمنصف (d) و دایره یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند مسئله دو جواب دارد. (ص ۳۹)

ب) اگر مماس شوند مسئله یک جواب دارد.

پ) در صورتی‌که یکدیگر را قطع نکنند مسئله جواب ندارد.



۷۱ داخل (ص ۴۶)

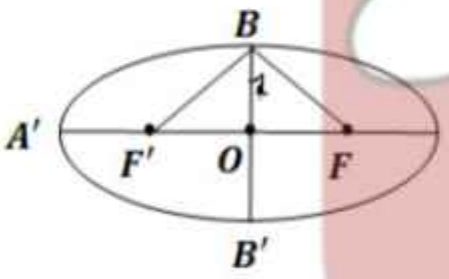
۷۲ دایره (ص ۴۹)

۷۳ $r = \frac{|۳\times۰ - ۴\times۳ - ۳|}{\sqrt{۳^۲ + (-۴)^۲}} = ۳ \Rightarrow (x-۰)^۲ + (y-۳)^۲ = ۹$

۷۴ $\sqrt{۳^۲ + ۴^۲ + ۵^۲} = ۵\sqrt{۲}$

۷۵ $y^۲ = ۲x + ۴y \Rightarrow (y-۲)^۲ = ۲(x+۲)$

نوع افقی رو به راست رأس سهمی نقطه $(-۲, ۲)$ پارامتر سهمی $a = \frac{۱}{۲}$ مختصات کانون سهمی برابر با $(-\frac{۳}{۲}, ۲)$ معادله خط هادی برابر است با $x = \frac{-۵}{۲}$ است و مختصات نقاط برخورد با محور yها برابر است با $(۰, ۰)$ و $(۰, ۴)$ و محور xها $(۰, ۰)$

۷۶ 

[خطای پردازش ریاضی]

۷۷ $x^۲ + y^۲ - ۲x - ۲y = ۳ \Rightarrow (x-۱)^۲ + (y-۱)^۲ = ۵ \Rightarrow O = (۱, ۱)$

$m_{OA} = \frac{۳-۱}{۲-۱} = ۲$ شیب خط مماس $m' = \frac{۱}{m} = \frac{-۱}{۲}$ است، پس معادله خط مماس به صورت $y - ۲ = \frac{-۱}{۲}(x-۳)$ است.

۷۸ $R = OM = \sqrt{(۱-۲)^۲ + (۱-۳)^۲} = \sqrt{۵}$

$(x-۲)^۲ + (y-۳)^۲ = ۵$

۷۹ $A = \begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ -۴ & ۳ \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow X = A^{-۱}B = \frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ \\ ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۷ \\ ۱۰ \end{bmatrix}$

۸۰ الف) ماتریس ب) مشترک پ) خارج ت) صفر

۸۱ الف) درست ب) درست پ) نادرست ت) نادرست

۸۲ الف) $c^۲ = a^۲ - b^۲ = ۹ - ۴ = ۵ \Rightarrow c = \sqrt{۵} \Rightarrow FF' = ۲\sqrt{۵}$

ب) $A(۴+۳, ۵), A'(۴-۳, ۵)$

۸۳ الف) $A = (۲, ۰, ۰), B = (۱, ۰, ۳)$

ب) $AB = \sqrt{(۲-۱)^۲ + (۰-۰)^۲ + (۰-۳)^۲} = \sqrt{۱۰}$

ب) $M = (\frac{۲+۱}{۲}, \frac{۰+۰}{۲}, \frac{۰+۳}{۲}) = (\frac{۳}{۲}, ۰, \frac{۳}{۲})$ (ص ۷۶ و ۶۶)

۸۴ الف) $y^۲ - ۲y + ۱ = -۸x - ۹ + ۱ \Rightarrow (y-۱)^۲ = -۸(x+۱) \Rightarrow A = (-۱, ۱), a = ۲$

$F(-۳, ۱), x = ۱$

ب) رسم سهمی (ص ۵۵)

۸۵ در مثلث BOF داریم:

[خطای پردازش ریاضی]

(ص ۵۸) *[خطای پردازش ریاضی]*

۸۶ مرکز دایره برابر است با $O(۱, ۱)$ شیب خط عمود بر دایره در نقطه $A(۲, ۳)$ برابر است با:

$m_{AO} = \frac{۳-۱}{۲-۱} = ۲$

شیب خط مماس بر دایره در نقطه $A(۲, ۳)$ قرینه و برعکس شیب خط عمود است:

$m' = -\frac{۱}{m_{OA}} = -\frac{۱}{۲}$

معادله خط مماس بر دایره برابر است با:

$y - ۳ = \frac{-۱}{۲}(x-۲)$

(ص ۴۵)

۸۷ $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'} \Rightarrow \frac{۲}{m-۱} = \frac{m}{۱} \neq \frac{۱}{۳} \Rightarrow m(m-۱) = ۲ \Rightarrow \begin{cases} m = -۱ \\ m = ۲ \end{cases}$ (ص ۲۶)

۸۸ $A \times B = \begin{bmatrix} ۴ & a \\ b & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۴+۳a & -۸+۲a \\ b-۳ & -۲b-۲ \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} -۸+۲a = ۰ \rightarrow a = ۴ \\ b-۳ = ۰ \rightarrow b = ۳ \end{cases}$ (ص ۲۱)

۸۹ الف) نادرست (ص ۲۱) ب) نادرست (ص ۳۹) پ) نادرست (ص ۴۲) ت) درست (ص ۸۱)

۹۰ الف) قطری (ص ۱۲) ب) مشترک (ص ۳۶) پ) پاره‌خط (ص ۴۹) ت) yoz (ص ۷۳)

۹۱ نقطه $A = (۰, ۲, ۳)$ و مختصات وسط AB برابر است با: $(-۲, ۴, ۰)$

۹۲ محور Zها

۹۳ $b = -۳$

۹۴ اگر قطر دهانه دیش را با $۲r$ و گودی را با h نمایش دهیم. فاصله کانونی برابر $a = \frac{۴r^۲}{۱۶h}$ است.

$۲r = ۶۰, h = ۹$ با جایگذاری در رابطه فوق داریم: $a = \frac{(۲r)(۲r)}{۱۶h} = \frac{۶۰\times۶۰}{۱۶(۹)} = ۲۵$

(اگر رابطه فوق به صورت $a = \frac{r^۲}{۴h} = \frac{(۳۰)^۲}{۴(۹)} = ۲۵$ نوشته شود درست است.)

۹۵ الف) $\begin{cases} ۲a = ۱۰ \to a = ۵ \\ ۲b = ۶ \to b = ۳ \end{cases} \Rightarrow a^۲ = b^۲ + c^۲ \Rightarrow c = ۴$

در مثلث MFF' میانه وارد بر یک ضلع $MO = \frac{۱}{۲}FF' = ۴$ نصف ضلع روبه‌رو است. در نتیجه مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

ب) $MF + MF' = ۲a = ۱۰ \Rightarrow MF' = ۱۰ - MF$

$MF^۲ + MF'^۲ = FF'^۲ \Rightarrow MF^۲ + (۱۰ - MF)^۲ = ۸^۲ \Rightarrow MF = ۵ - \sqrt{۷}$

۹۶ مرکز و شعاع دایره $x^۲ + y^۲ - ۶x - ۲y + ۹ = ۰ \Rightarrow (x-۳)^۲ + (y-۱)^۲ = ۱$ برابر است با:

$O' = (۳, ۱), r' = ۱$

فاصله دو مرکز برابر $d = oo' = \sqrt{(۳)^۲ + (۱)^۲} = \sqrt{۱۰}$ و $r + r' = ۲$ دو دایره بیرون یک‌دیگرند (متخارجند).

۹۷ الف) درست ب) نادرست پ) درست ت) نادرست

۹۸ الف) ۸ ب) خط پ) دایره ت) ۶

۹۹ مرکز و شعاع دایره $(x-۱)^۲ + y^۲ = ۱$ برابر است با: $O(۱, ۰), r = ۱$

و مرکز و شعاع دایره $x^۲ + (y-۱)^۲ = ۱$ برابر $O' = (۰, ۱), r' = ۱$

فاصله دو مرکز برابر $OO' = \sqrt{۲}$ و $r + r' = ۲$ و $r - r' = ۰$

$|r - r'| < OO' < r + r'$

بنابراین دو دایره متقاطع‌اند.

۱۰۰

$$\begin{cases} x+y=۱ \\ x-y=۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=۲ \\ y=-۱ \end{cases}, r=\frac{|۴(۲)+۳(-۱)+۵|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{۱۰}{۵}=۲$$

مرکز دایره $O(۲,-۱)$ و شعاع آن برابر $r=۲$ است. معادله دایره برابر با: $(x-۲)^۲+(y+۱)^۲=۴$ است.