خلاصه درس و ۱۰۰ سوال متوسط نهایی

ریزطبقه بندی شده حسابان ۲

دبیرستان موحد

استاد محمدیان

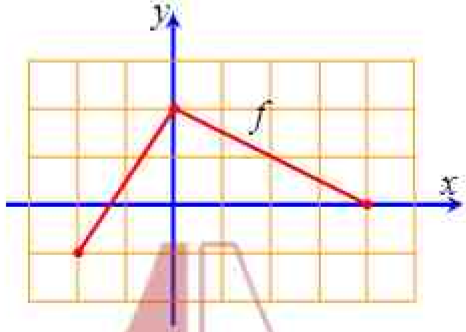
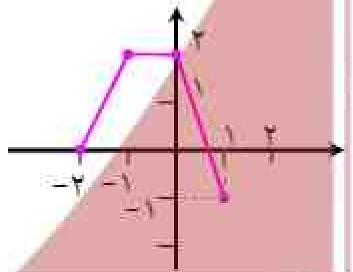
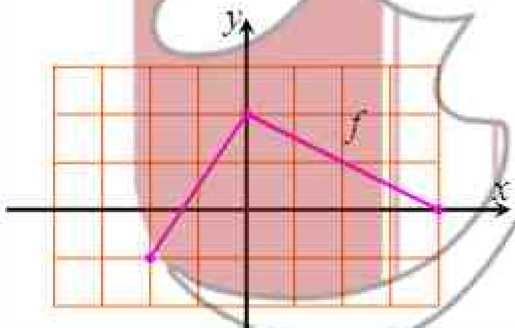
((فصل اوّل : تابع))

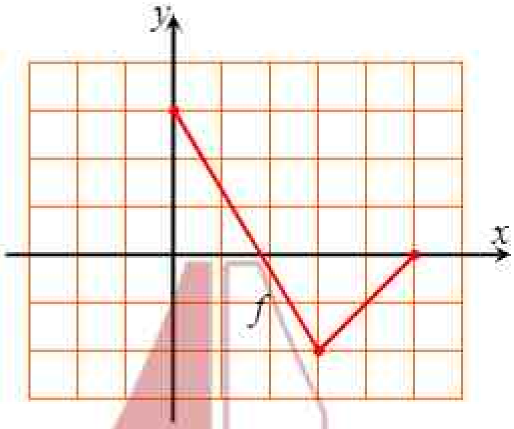
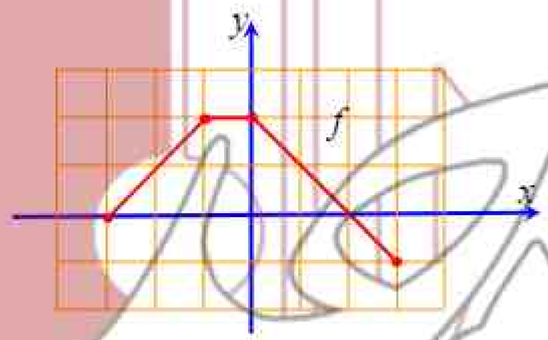
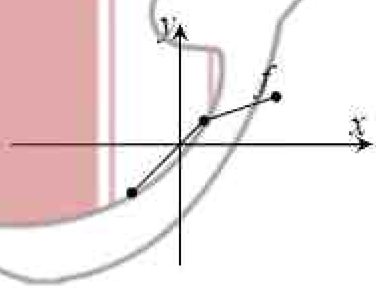
***

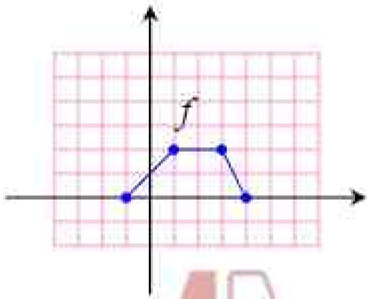
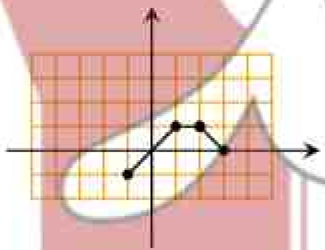
تبدیل نمودار توابع

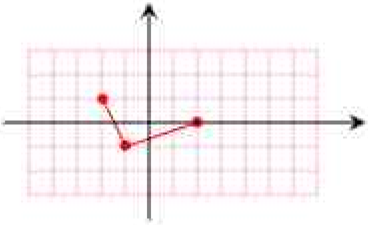
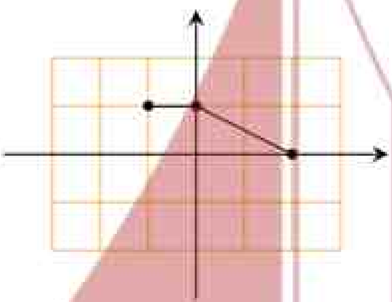
برای تابع $y = f(x)$ و با فرض مثبت بودن عدد k به شکل زیر بیان می شود.

تابع جدید	نحوه‌ی تبدیل		نتیجه	
$y = f(x) + k$	به عرض نقاط k واحد اضافه می شود.	طول نقاط ثابت می ماند.	نمودار به اندازه‌ی k واحد بالا می رود.	مطیع
$y = f(x) - k$	از عرض نقاط k واحد کم می شود.		نمودار به اندازه‌ی k واحد پایین می رود.	
$y = kf(x)$	عرض نقاط در k ضرب می شود.		اگر $0 < k < 1$ نمودار در جهت عمودی منقبض می شود. اگر $k > 1$ نمودار در جهت عمودی منبسط می شود.	
$y = f(x + k)$	از طول نقاط k واحد کم می شود.	عرض نقاط ثابت می ماند.	نمودار به اندازه‌ی k واحد به عقب می رود.	لجباز
$y = f(x - k)$	به طول نقاط k واحد اضافه می شود.		نمودار به اندازه‌ی k واحد به جلو می رود.	
$y = f(kx)$	طول نقاط در $\frac{1}{k}$ ضرب می شود.		اگر $0 < k < 1$ نمودار در جهت افقی منبسط می شود. اگر $k > 1$ نمودار در جهت افقی منقبض می شود.	

۱	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = -f(۲x)$ را رسم کنید. سپس دامنه و برد تابع g را تعیین کنید.  	دی ۹۷	۱/۵ نمره
۲	نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x) = ۲f(x-۱)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.  	خرداد ۹۸	۱ نمره
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر $k > ۱$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از انبساط افقی نمودار $y = f(x)$ در راستای محور xها به دست می آید.	خرداد ۹۸	۰/۲۵ نمره
۴	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(۲x) - ۱$ را رسم کنید. سپس دامنه‌ی تابع g را تعیین کنید.  	تیر ۹۸	۱/۲۵ نمره
۵	کوتاه پاسخ دهید. الف : در فاصله‌ی $(۰,۱)$ از بین دو تابع $g(x) = x^۳$ و $f(x) = x^۲$، نمودار کدام تابع پایین تر از دیگری قرار دارد؟ ب : نمودار تابع $y = -f(x)$، قرینه‌ی نمودار تابع $y = f(x)$ نسبت به کدام محور است؟	شهریور ۹۸	۰/۵ نمره

۶	نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(۳ - x)$ را رسم کـرده و دامنه‌ی آن را تعیین کنید. 	شهریور ۹۸	۱ نمره
۷	نمودار تابع $f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. نمودار تابع $g(x) = f(۲x + ۱)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید. 	دی ۹۸	۱/۲۵ نمره
۸	با توجه به نمودار تابع f که در شکل زیر آمده است. نمودار تابع $g(x) = f(۲x) - ۱$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید. 	خرداد ۹۹	۱ نمره
۹	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. نقطه‌ی $(۲,-۱)$ در تابع $y = f(۲x + ۱) - ۱$ متناظر با نقطه‌ی ...... در تابع $y = f(x)$ است.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره

۱۰	اگر نمودار f به صورت مقابل باشد. نمودار تابع $y = f(x-1)+2$ زیر را رسم کنید و دامنه و برد آنها را بنویسید. 	خرداد ۹۹ خ	۱/۵ نمره
۱۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. نمودار تابع $y = (x+2)^3$ را می توان با ۲ واحد انتقال نمودار تابع $y = x^3$ به سمت چپ، رسم کرد.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۱۲	در جاهای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. اگر بازه‌ی $[-2,1]$ دامنه‌ی تابع $f(x)$ باشد، دامنه‌ی تابع $f(3x+1)$ برابر ...... است.	شهریور ۹۹	۰/۵ نمره
۱۳	نمودار تابع زیر را به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ رسم کنید. $y = \cos 2x - 1$	شهریور ۹۹	۱ نمره
۱۴	نمودار تابع $f(x)$ به صورت زیر است. نمودار تابع $g(x) = f(2x-1)$ را رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. 	دی ۹۹	۱ نمره
۱۵	نمودار تابع $y = \cos(x - \frac{\pi}{4})$ را به کمک نمودار $y = \cos x$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ رسم کنید.	خرداد ۱۴۰۰	۰/۷۵ نمره
۱۶	جای خالی را با عدد یا کلمه‌ی مناسب کامل کنید. اگر $k > 1$ باشد، نمودار $y = f(kx)$ از ...... نمودار $y = f(x)$ در راستای محور xها به دست می آید.	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۷	نمودار $y=f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x)=2f(x+1)$ را رسم کرده و دامنه و برد تابع g را تعیین کنید. 	شهریور ۱۴۰۰	۱ نمره
۱۸	۲) نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت زیر است. نمودار $g(x)=f(x-1)+2$ را رسم کرده و دامنه‌ی تابع $g(x)$ را تعیین کنید. 	دی ۱۴۰۰	۱ نمره

***

تابع درجه‌ی سوم و چند جمله ای

اگر n یک عدد صحیح نامنفی و a_0 و a_1 و a_2 و ... و a_n اعداد حقیقی باشند که $a_n \neq 0$. در این صورت تابع زیر را یک **تابع چندجمله‌ای** از درجه‌ی n می نامند.

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2}+...+a_2x^2+a_1x+a_0$$

برای مثال توابع زیر توابع چندجمله ای هستند.

الف) تابع ثابت

$f(x)=c$ تابع چندجمله ای از درجه صفر[1]

ب) تابع خطی

$f(x)=ax+b$ تابع چندجمله ای از درجه یک

ج) تابع درجه۲(سهمی)

$f(x)=ax^2+bx+c$ تابع چندجمله ای از درجه دو

د) تابع زیر نیز یک تابع چند جمله ای از درجه ۳ است.

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ تابع چندجمله ای از درجه سه

۱	کوتاه پاسخ دهید. درجه‌ی تابع $f(x)=x^2(1-x)^5$ را مشخص کنید.	شهریور ۹۸	۰/۲۵ نمره

1. برای تابع $f(x)=0$ درجه تعریف نمی شود.

۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. نمودار تابع $y=x^3$ در بازه‌ی $[0,1]$ پایین تر از نمودار تابع $y=x^2$ قرار دارد.	خرداد ۹۹	۰/۲۵ نمره
۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. چند جمله ای $P(x)=(2-x)^2(x+1)^3$ یک چند جمله ای از درجه‌ی ۵ است.	شهریور ۹۹	۰/۲۵ نمره

***

توابع یکنوا

تابع $y=f(x)$ را روی دامنه اش صعودی گویند، هرگاه :

$$\forall x_1,x_2 \in D_f ; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

تابع $y=f(x)$ را روی دامنه اش صعودی اکید (اکیداً صعودی) گویند هرگاه :

$$\forall x_1,x_2 \in D_f ; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

تابع $y=f(x)$ را روی دامنه اش نزولی گویند، هرگاه :

$$\forall x_1,x_2 \in D_f ; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

تابع $y=f(x)$ را روی دامنه اش نزولی اکید (اکیداً نزولی) گویند هرگاه :

$$\forall x_1,x_2 \in D_f ; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

تابع $y=f(x)$ را روی دامنه اش ثابت است، هرگاه :

$$\forall x_1,x_2 \in D_f ; x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

توجه :

۱ : هر تابع صعودی اکید یا نزولی اکید را تابع اکیداً یکنوا می نامند.

۲ : اگر تابعی صعودی یا نزولی باشد، را یکنوا می نامند.

۳ : طبق تعریف تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است یعنی یکنوا است ولی اکیداً یکنوا نیست.

۴ : برای تعیین صعودی یا نزولی یا ثابت بودن تابع به کمک نمودار آن، نمودار را از چپ به راست نگاه کنید. **۵ :** به طور مشابه، صعودی یا نزولی بودن تابع را می توان در یک فاصله مانند $I \subseteq D_f$ تعریف نمود.

۱	نمودار تابع $f(x)=(x+1)^3$ را رسم کنید. سپس تعیین کنید که این تابع در دامنه‌ی خود اکیداً صعودی است یا اکیداً نزولی؟	دی ۹۷	۰/۷۵ نمره
۲	کوتاه پاسخ دهید. تابع $h(x)=\lvert x+2 \rvert$ در چه بازه ای اکیداً صعودی است؟	شهریور ۹۸	۰/۲۵ نمره

۳	اگر $\log(x+1) \le \log(2x-3)$ ، حدود x را به دست آورید؟	شهریور۹۸	۰/۵ نمره
۴	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. اگر تابع f در یک بازه نزولی باشد، آنگاه در این بازه اکیداً نزولی می باشد.	دی ۹۸	۰/۵ نمره
۵	در جاهای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. اگر $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x-2} \le \frac{1}{64}$ باشد، حدود x برابر .... است.	دی ۹۸	۰/۵ نمره
۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر تابع $y=f(x)$ در یک فاصله صعودی باشد، آنگاه در آن فاصله اکیداً صعودی نیز خواهد بود.	خرداد ۹۹	۰/۲۵ نمره
۷	نمودار تابع $f(x)=x^2+2$ را رسم کرده و مشخص کنید در چه بازه ای این تابع اکیداً صعودی و در چه بازه ای اکیداً نزولی است.	خرداد ۹۹	۱ نمره
۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $g(x)=2^{-x}$، تابعی است که در تمام دامنه‌ی خود اکیداً یکنوا است.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x)=-x^2+2x$ روی بازه‌ی $(-\infty, 3]$ اکیداً صعودی است.	خرداد ۹۹	۰/۲۵ نمره
۱۰	جاهای خالی را با عبارت مناسب پرکنید. برای آنکه تابع $y=ax+b$ در دامنه اش هم صعودی باشد و هم نزولی، مقدار a باید برابر با ..... باشد.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۱۱	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر تابع f در یک بازه نزولی اکید باشد، در این بازه نزولی نیز هست.	شهریور۹۹	۰/۲۵ نمره
۱۲	با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} 1-x^2 & x \le 1 \\ -1 & x > 1 \end{cases}$ تعیین کنید که این تابع در چه بازه ای صعودی و در چه بازه ای نزولی می باشد	دی ۹۹	۱ نمره

ردیف	سؤال	تاریخ	نمره
۱۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. تابع $f(x)$ در بازه‌ی شامل b و a صعودی است. اگر $f(a) \le f(b)$ آنگاه $a \le b$	دی ۹۹	۰/۲۵ نمره
۱۴	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. به تابعی که در یک بازه فقط صعودی یا نزولی باشد، ..... می گوییم.	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره
۱۵	با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x \ge 0 \\ -3x & -1 < x < 0 \end{cases}$ ، تعیین کنید، تابع در چه بازه ای اکیداً صعودی و در چه بازه ای اکیداً نزولی می باشد.	خرداد ۱۴۰۰	۰/۷۵ نمره
۱۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. تابع $y=-\log_5^x+1$ در دامنه‌ی خود، یک تابع اکیداً یکنوا است.	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره
۱۷	با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} -x^2+2 & -2 \le x < -1 \\ -x-1 & -1 \le x < 1 \\ x^2-1 & 1 \le x \end{cases}$ تعیین کنید. تابع در چه بازه ای صعودی و در چه بازه ای نزولی می باشد.	شهریور ۱۴۰۰	۱ نمره
۱۸	در $(\frac{1}{81}) \le (\frac{1}{3})^{10-2x}$ حدود x را به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۰	۰/۵ نمره
۱۹	ابتدا نمودار تابع $f(x)=\|x-1\|$ را رسم کنید، سپس تعیین کنید که تابع در چه بازه ای اکیداً صعودی و در چه بازه ای اکیداً نزولی است.	دی ۱۴۰۰	۱ نمره

تقسیم چند جمله ای ها و بخش پذیری

اگر چند جمله ای $P(x)$ را بر $x-a$ تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{array}{l|l} P(x) & x-a \\ \cline{2-2} \cdots & Q(x) \\ \hline R(x) & \end{array}$$

$$P(x)=Q(x)\cdot(x-a)+R(x)$$

و باقی مانده‌ی تقسیم $P(x)$ بر $x-a$ برابر $P(a)$ است.

چند جمله ای $A(x)$ را بر چند جمله ای $B(x)$ بخش پذیر گویند، هرگاه باقی مانده‌ی تقسیم $A(x)$ بر $B(x)$ صفر شود.

۱	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. اگر باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)=x^2+kx-1$ بر $x+1$ برابر ۲ باشد. مقدار k برابر ...... است.	دی ۹۷	۰/۲۵ نمره
۲	اگر چند جمله ای $f(x)=x^2+ax-3$ بر $x+1$ بخش پذیر باشد. باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)$ بر $x-2$ را به دست آورید.	خرداد ۹۸	۰/۷۵ نمره
۳	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. باقی مانده‌ی تقسیم $f(x)=x^3-2x$ بر $x-1$ برابر با .... است.	تیر ۹۸	۰/۲۵ نمره
۴	مقدار b و a را طوری تعیین کنید که چندجمله ای $P(x)=x^3+ax^2+bx-2$ بر $x-2$ بخش پذیر بوده و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x+1$ برابر ۳ باشد.	تیر ۹۸	۱ نمره
۵	مقادیر b و a را طوری تعیین کنید که چندجمله ای $P(x)=x^3+ax^2+bx+1$ بر $x-2$ و $x+1$ بخش پذیر باشد.	شهریور ۹۸	۱ نمره
۶	در چند جمله ای $f(x)=x^3+ax^2+b$ ، مقادیر b و a را چنان بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x-1$ برابر ۴ باشد و بر $x+2$ بخش پذیر باشد.	دی ۹۸	۱/۲۵ نمره
۷	مقدار b و a را طوری تعیین کنید که چندجمله ای x^3+ax^2+bx+1 بر $x-2$ و $x+1$ بخش پذیر باشد.	خرداد ۹۹	۱ نمره
۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. در تقسیم $f(x)=x^3+2$ بر $p(x)=2x-1$ باقی مانده برابر صفر است.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۹	در چند جمله ای $y=x^3+ax^2+x+b$ مقادیر a و b را چنان بیابید که باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x-1$ برابر با ۴ باشد و بر $x+2$ بخش پذیر باشد.	خرداد ۹۹ خ	۱ نمره
۱۰	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله ای $P(x)=x^3+ax^2+bx-2$ بر $x-2$ بخش پذیر بوده و باقی مانده‌ی تقسیم آن بر $x+1$ برابر ۳ باشد.	شهریور ۹۹	۱/۵ نمره
۱۱	باقی مانده‌ی تقسیم عبارت های $p(x)=x^3+ax+1$ و $q(x)=2x^2-x+1$ بر $x+2$ یکسان می باشد. مقدار a را بیابید.	خرداد ۱۴۰۰	۰/۷۵ نمره

۱۲	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله ای $P(x)=x^{3}-ax^{2}+bx+2$ بر $x+2$ و $x-1$ بخش پذیر باشد.	دی ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

***

اتحاد های تکمیلی

برای هر عدد طبیعی n عبارت x^n-y^n بر $x-y$ بخش پذیر است. همچنین :

$$x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+\dots+xy^{n-2}+y^{n-1})$$

اگر n فرد باشد،

$$x^n+y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\dots-xy^{n-2}+y^{n-1})$$

اگر n زوج باشد،

$$x^n-y^n=(x+y)(x^{n-1}-x^{n-2}y+\dots+xy^{n-2}-y^{n-1})$$

نتیجه : اگر a یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی باشد. به کمک اتحادهای فوق داریم:

الف :

$$a^n-1=(a-1)(a^{n-1}+a^{n-2}+a^{n-3}+a^{n-4}+\dots+a^{2}+a+1)$$

ب : در حالتی که n فرد باشد.

$$a^n+1=(a+1)(a^{n-1}-a^{n-2}+a^{n-3}-a^{n-4}+\dots+a^{2}-a+1)$$

۱	هر یک از چندجمله ای های زیر را برحسب عامل خواسته شده، تجزیه کنید. الف) $x^{5}+1$ با عامل $x+1$ ب) $x^{6}-1$ با عامل $x-1$	دی ۹۷	۱ نمره
۲	چندجمله ای $x^{6}-1$ را بر حسب عامل $x+1$ تجزیه کنید.	خرداد ۹۸	۰/۵ نمره
۳	چند جمله ای $x^{5}+1$ را بر حسب عامل $x+1$ تجزیه کنید.	خرداد ۹۹ خ	۰/۵ نمره
۴	چند جمله ای $x^{6}-1$ را با عامل $x-1$ تجزیه کنید.	دی ۹۹	۱ نمره
۵	چند جمله ای $x^{5}+32$ را بر حسب عامل $x+2$ تجزیه کنید.	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲ نمره

((فصل دوّم : مثلثات))

***

دوره‌ی تناوب

برای توابع $f(x)=a\sin bx+c$ و $f(x)=a\cos bx+c$ داریم :

الف : مقدار ماگزیمم برابر $|a|+c$ ب : مقدار می نیمم برابر $-|a|+c$ پ : دوره‌ی تناوب برابر $T=\frac{2\pi}{|b|}$

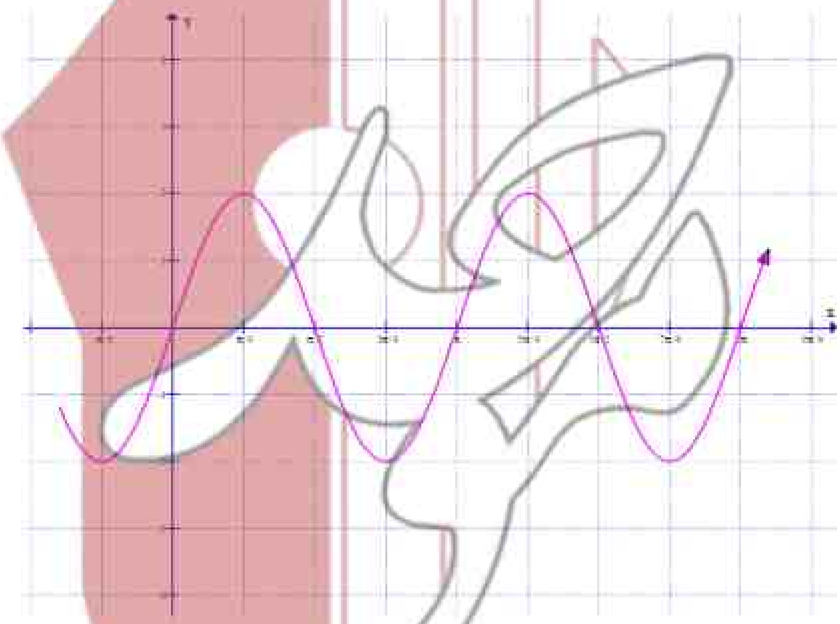
در صورتی مقدار ماگزیمم و مقدار می نیمم و دوره‌ی تناوب معلوم باشد. برای نوشتن معادله‌ی توابع مثلثاتی به صورت

$$f(x)=a\sin bx+c \text{ یا } f(x)=a\cos bx+c$$

الف : مقدار b را مثبت قرار می دهیم و $b=\frac{2\pi}{T}$

ب : $a=\pm\frac{\max(f)-\min(f)}{2}$ ج : $c=\frac{\max(f)+\min(f)}{2}$

۱	درست یا نادرست بودن جمله‌ی زیر را مشخص کنید. مینیمم تابع $y=-3\cos(\pi x)+2$ برابر یک است.	دی ۹۷	۰/۲۵ نمره
۲	ضابطه‌ی تابعی به فرم $y=a\sin bx+c$ را بنویسید که دوره‌ی تناوب آن π، مقدار ماکزیمم آن ۳ و مقدار مینیمم آن ۳- باشد.	دی ۹۷	۱ نمره
۳	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. دوره‌ی تناوب تابع $y=3\cos(-\frac{\pi}{4}x)$ برابر با ..... است.	خرداد ۹۸	۰/۲۵ نمره
۴	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. دوره‌ی تناوب تابع $y=-\frac{1}{4}\cos(\pi x)$ برابر با ..... است.	تیر ۹۸	۰/۲۵ نمره
۵	مقدار ماکزیمم و مینیمم تابع $y=1-2\sin(3x)$ را به دست آورید.	تیر ۹۸	۰/۵ نمره

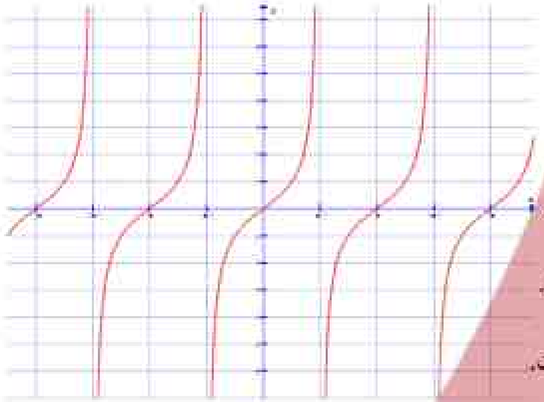
۶	دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = -3\cos(\pi x) + 1$ را مشخص کنید.	شهریور۹۸	۱/۵ نمره
۷	ضابطه‌ی تابعی به صورت $y = a\sin bx + c$ را بنویسید که دوره‌ی تناوب آن π، مقدار ماکزیمم آن ۶ و مقدار مینیمم آن ۲- باشد.	دی ۹۸	۱/۵ نمره
۸	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب را بنویسید. دوره‌ی تناوب تابع $y = 8\cos(\frac{x}{3})$ برابر با ...... است.	خرداد ۹۹	۰/۲۵ نمره
۹	مقدار ماکزیمم و می نیمم تابع $y = 1 + 2\sin 7x$ را به دست آورید.	خرداد ۹۹	۱ نمره
۱۰	معادله‌ی منحنی رو به رو را به صورت $y = a\cos(bx)$ یا $y = a\sin(bx)$ بیان کنید. 	خرداد ۹۹ خ	۱ نمره
۱۱	جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید. دوره‌ی تناوب و مقدار مینیمم تابع $y = 2\sin\frac{\pi}{2}x - 1$ به ترتیب برابر با ...... و ...... است.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۱۲	دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و تابع $y = \sqrt{5} - \pi\cos\frac{1}{2}x$ را محاسبه کنید.	شهریور۹۹	۱ نمره

۱۳	در شکل نمودار زیر، با تعیین مقادیر ماکزیمم و می نیمم تابع ، ضابطه‌ی آن را بنویسید. 	دی ۹۹	۱/۲۵ نمره
۱۴	ضابطه‌ی یک تابع سینوسی با دوره‌ی تناوب ۳ و مقادیر ماکزیمم ۵ و مینیمم ۳ را بنویسید.	خرداد ۱۴۰۰	۰/۷۵ نمره
۱۵	دوره‌ی تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = ۹ - ۲\pi\cos(\frac{x}{۴})$ را محاسبه کنید.	شهریور ۱۴۰۰	۱/۵ نمره
۱۶	ضابطه‌ی تابعی به فرم $y = a\cos bx + c$ را بنویسید که دوره‌ی تناوب آن ۲ و مقدار ماکزیمم آن ۴ و مقدار می نیمم آن ۲- باشد.	دی ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

تابع تانژانت

تابع $f(x) = \tan(x)$ را **تابع تانژانت** می نامند.

تابع تانژانت در یک دوره‌ی تناوب محصور بین مضرب های متوالی $\frac{\pi}{۲}$ اکیداً صعودی است. امّا در دامنه اش نه صعودی و نه نزولی می باشد.



تابع تانژانت دارای ویژگی های زیر است.

الف : اگر زاویه‌ی α در ربع اوّل یا سوّم باشد، مقدار تابع مثبت است.

ب : اگر زاویه‌ی α در ربع دوّم یا چهارم باشد، مقدار تابع منفی است.

ج : اگر زاویه‌ی α برابر صفر یا π رادیان باشد، مقدار تابع صفر است.

د : تابع در نقاط $\frac{\pi}{۲}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ تعریف نمی شود. به طور کلی دامنه و برد تابع تانژانت به شکل زیر است.

$$D_f = \{x \in R \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{۲} \ , \ k \in Z\}$$

$$R_f = R$$

و : چون $\tan(\pi + x) = \tan(x)$ پس این تابع متناوب است و دوره‌ی تناوب آن $T = \pi$ می باشد.

به طور کلی دوره‌ی تناوب تابع $f(x) = a\tan(bx) + c$ برابر $T = \frac{\pi}{|b|}$ است.

توجه داشته باشیم که

الف) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{۱ - \tan\alpha.\tan\beta}$ ب) $\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{۱ + \tan\alpha.\tan\beta}$

۱	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. دوره‌ی تناوب تابع تانژانت برابر با .... است.	دی ۹۷	۰/۲۵ نمره
۲	درست یا نادرست بودن جمله‌ی زیر را مشخص کنید. تابع تانژانت در دامنه اش صعودی است.	دی ۹۷	۰/۲۵ نمره
۳	درست یا نادرست بودن جمله‌ی زیر را مشخص کنید. نقاطی به فرم $x = k\pi + \frac{\pi}{۲}$ که در آن $k \in Z$ در دامنه‌ی تابع تانژانت قرار ندارند.	خرداد ۹۸	۰/۲۵ نمره

۴	کدام یک از جملات زیر درست و کدام یک نادرست است؟ الف : تابع تانژانت در بازه‌ی $(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ اکیداً صعودی است؟ ب : نقاطی به فرم $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ و $k\in Z$ در دامنه‌ی تابع تانژانت قرار دارند.	شهریور ۹۸	۰/۵ نمره
۵	جای خالی را با عبارت مناسب پرکنید. دوره‌ی تناوب اصلی تابع $y=\tan x$ برابر ...... است.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۶	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را مشخص کنید. مقدار تابع تانژانت در $x=\frac{\pi}{2}$ تعریف نشده است.	شهریور ۹۹	۰/۲۵ نمره
۷	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. دامنه‌ی تابع با ضابطه‌ی $y=\tan x$ به صورت $\{x\in R \mid x\neq \ ...\ \}$ است.	دی ۹۹	۰/۲۵ نمره
۸	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. برد تابع تانژانت ($y=\tan x$) برابر ..... است.	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره
۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. در بازه‌ی $\frac{3\pi}{2}<\theta<2\pi$ مقدار $\tan\theta$ از مقدار $\sin\theta$ کوچکتر است.	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره
۱۰	جای خالی را با عدد یا کلمه‌ی مناسب کامل کنید. دوره‌ی تناوب تابع تانژانت برابر .... می باشد.	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

معادلات مثلثاتی

برای حل هر معادله‌ی مثلثاتی باید ابتدا با انجام عملیاتی[1] آن را به یکی از صورت های زیر تبدیل کرد و جواب عمومی آن را تعیین کرد.

ردیف	صورت معادله	شرط داشتن جواب	یافتن زاویه	جواب عمومی
۱	$\sin(u)=a$	$-1\leq a\leq 1$	$\sin(u)=\sin\alpha$	$u=2k\pi+\alpha$ $u=(2k+1)\pi-\alpha$
۲	$\cos(u)=b$	$-1\leq b\leq 1$	$\cos(u)=\cos\alpha$	$u=2k\pi+\alpha$

[1] . رایج ترین این عملیات، استفاده از فرمول های مثلثاتی و فاکتور گیری است. این عملیات به دو منظور بکار می روند.
الف : یکسان سازی نسبت های مثلثاتی ب : یکسان سازی زاویه‌ی مثلثاتی

				$u = 2k\pi - \alpha$
۳	$\tan(u) = c$	–	$\tan(u) = \tan\alpha$	$u = k\pi + \alpha$
۴	$\cot(u) = d$	–	$\cot(u) = \cot\alpha$	

تذکر: با توجه به این جدول

۱) اگر مقادیر c و a منفی باشد، در فرمول جواب قرینه‌ی زاویه‌ی α را قرار دهید.

۲) اگر مقادیر d و b منفی باشد، در فرمول جواب مکمل زاویه‌ی α را قرار دهید.

۳) α کوچکترین زاویه‌ی غیر منفی است که تساوی به ازاء آن برقرار می باشد و آنرا زاویه‌ی اصلی می نامند.

برای تعیین زاویه‌ی اصلی در صورت وجود می توانید از جدول مقادیر نسبت های مثلثاتی استفاده کنید و در غیر این صورت می توانید به ذکر α اکتفا کنید.

علاوه بر جدول کلی فوق در حل معادلات مثلثاتی می توان از حالت های خاص زیر نیز استفاده نمود.

$\sin(u) = 1 \rightarrow u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	$\cos(u) = 0 \rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$
$\sin(u) = 0 \rightarrow u = k\pi$	$\cos(u) = -1 \rightarrow u = 2k\pi + \pi$
$\sin(u) = -1 \rightarrow u = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$	$\tan(u) = 0 \rightarrow u = k\pi$
$\cos(u) = 1 \rightarrow u = 2k\pi$	$\cot(u) = 0 \rightarrow u = k\pi + \frac{\pi}{2}$

۱/۲۵ نمره	دی ۹۷	معادله‌ی مثلثاتی $\cos 3x - \cos x = 0$ را حل کنید.	۱
۱/۵ نمره	خرداد ۹۸	معادله‌ی $\cos 2x + \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.	۲
۱/۲۵ نمره	تیر ۹۸	معادله‌ی $\sin 2x - \cos x = 0$ را حل کنید.	۳

ردیف	سؤال	تاریخ	بارم
۴	معادله‌ی $\sin 3x = \sin 2x$ را حل کنید.	شهریور۹۸	۱ نمره
۵	معادله‌ی $2\cos 3x - \sqrt{3} = 0$ را حل کنید.	دی ۹۸	۱/۵ نمره
۶	معادله‌ی $2\sin 3x - \sqrt{2} = 0$ را حل کنید.	خرداد ۹۹	۱/۵ نمره
۷	مثلثی با مساحت $8\sqrt{2}$ سانتی متر مربع است. اگر اندازه‌ی هر ضلع آن۴ و ۸ سانتی متر باشد، آنگاه چند مثلث با این خاصیت وجود دارد؟	خرداد ۹۹ خ	۱ نمره
۸	معادله‌ی مثلثاتی مقابل را حل کنید. $2\sin^2 x + 9\cos x + 3 = 0$	خرداد ۹۹ خ	۱ نمره
۹	معادله‌ی مثلثاتی $\cos 3x - \cos x = 0$ را حل کنید.	شهریور۹۹	۱/۷۵ نمره
۱۰	معادله‌ی مثلثاتی $\sin x \cos x = \frac{\sqrt{2}}{4}$ را حل کنید.	دی ۹۹	۱/۵ نمره
۱۱	معادله‌ی مثلثاتی $2\cos^2 x = \sin x - 1$ را حل کنید.	خرداد ۱۴۰۰	۱ نمره
۱۲	معادله‌ی $2\sin x \cos x + 3\cos x = 0$ را حل کنید.	شهریور ۱۴۰۰	۱ نمره
۱۳	معادله‌ی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید.	دی ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

فصل سوّم

((حدهای نامتناهی،حد در بینهایت))

***

حدهای نامتناهی و حد در بی نهایت

فرض کنیم که تابع f در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$$

بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگتر کنیم به شرطی که x را از سمت راست به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

همچنین فرض کنیم که تابع f در یک همسایگی چپ نقطه ای مانند a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$$

بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگتر کنیم به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

به طور مشابه

فرض کنیم که تابع f در یک همسایگی راست نقطه ای مانند a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$$

بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد منفی کوچکتر کرد به شرطی که x را از سمت راست به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

فرض کنیم که تابع f در یک همسایگی چپ نقطه ای مانند a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$$

بدین معنی است که می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد منفی کوچکتر کرد به شرطی که x را از سمت چپ به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

اکنون **حدهای نامتناهی** را به صورت زیر تعریف می کنیم.

فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty$$

یعنی اینکه می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد مثبتی بزرگتر کنیم به شرطی که x را از هر دو سمت راست و چپ به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

همچنین فرض کنید تابع f در همسایگی محذوف a تعریف شده باشد. در این صورت

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty$$

یعنی اینکه می توانیم $f(x)$ را به دلخواه هر قدر که بخواهیم از هر عدد منفی کوچکتر کنیم به شرطی که x را از هر دو سمت راست و چپ به اندازه‌ی کافی به a نزدیک کرده باشیم.

و اما **حد در بی نهایت** را به صورت زیر تعریف می کنیم.

الف: اگر تابع $f(x)$ در بازه ای مانند $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت بی نهایت میل می کند برابر l است و می نویسیم $\lim_{x\to+\infty} f(x)=l$ هرگاه بتوان با اختیار x های به قدرکافی بزرگ، فاصله‌ی $f(x)$ از l را به هر اندازه کوچک کرد.

ب: اگر تابع $f(x)$ در بازه ای مانند $(-\infty,a)$ تعریف شده باشد، گوییم حد $f(x)$ وقتی x به سمت بی نهایت میل می کند برابر l است و می نویسیم $\lim_{x\to-\infty} f(x)=l$ هرگاه بتوان با اختیار x های به قدرکافی بزرگ، فاصله‌ی $f(x)$ از l را به هر اندازه کوچک کرد.

اکنون به تعاریف زیر توجه کنید.

الف : برای هر تابع مانند f که در بازه‌ی $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، اگر با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه مثبت بزرگتر شوند، می نویسند.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$$

ب : برای هر تابع مانند f که در بازه‌ی $(a,+\infty)$ تعریف شده باشد، اگر با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه منفی کوچکتر شوند، می نویسند.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

ج : برای هر تابع مانند f که در بازه‌ی $(-\infty,a)$ تعریف شده باشد، اگر با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه مثبت بزرگتر شوند، می نویسند.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$$

د : برای هر تابع مانند f که در بازه‌ی $(-\infty,a)$ تعریف شده باشد، اگر با بزرگ شدن مقادیر x مقادیر $f(x)$ از هر عدد دلخواه منفی کوچکتر شوند، می نویسند.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$$

توجه : در حد توابع چند جمله ای، با توجه به روش فاکتورگیری نتیجه می شود، که حد تابع چند جمله ای ، با حد جمله ای از آن که دارای بیشترین توان باشد، برابر است. از این به بعد در یک چند جمله ای ، جمله ای که دارای بیشترین توان باشد، را **جمله‌ی ارشد** نام گذاری می کنیم.

به طور مشابه برای محاسبه‌ی حد توابع کسری ، مانند توابع چند جمله ای ، ابتدا جملات ارشد را از صورت و مخرج انتخاب نموده و پس از ساده کردن، حد را محاسبه می کنیم به استدلال زیر توجه کنید.

در محاسبه ی حد توابع کسری نظیر $f(x)=\dfrac{p(x)}{q(x)}$ وقتی که $x\to\pm\infty$ به شکل زیر عمل می کنیم.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}p(x)}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}q(x)}=\frac{a\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^{n}}{b\lim\limits_{x\to\pm\infty}x^{m}}=\frac{a}{b}\lim_{x\to\pm\infty}x^{n-m}$$

که در آن ax^{n} جمله‌ی ارشد صورت و bx^{m} جمله‌ی ارشد مخرج فرض شده است.

نتیجه می شود که در محاسبه‌ی حد توابع کسری سه حالت وجود دارد.

الف) توان جمله‌ی ارشد صورت از توان جمله‌ی ارشد مخرج ، بیشتر باشد. در این صورت جواب مثبت بی نهایت یا منفی بی نهایت می شود.

ب) توان جمله‌ی ارشد صورت از توان جمله‌ی ارشد مخرج ، کمتر باشد. در این صورت جواب صفر حدی می شود.

---

[1]. تابعی که صورت و مخرج آن چند جمله ای باشند.

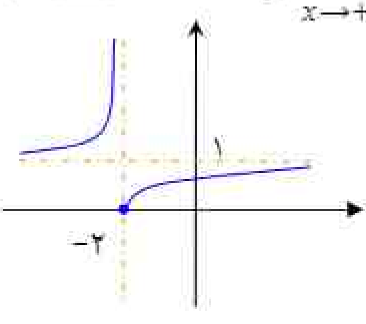
ج) توان جمله‌ی ارشد صورت و مخرج برابر باشد. در این صورت جواب عددی غیر صفر بوده و برابر نسبت ضریب های جملات ارشد می شود.

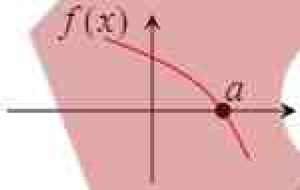
برای محاسبه‌ی حد تابع رادیکالی با فرجه‌ی ۲ (اصم)، با توجه به روش فاکتورگیری هم ارزی های زیر حاصل می شود. این هم ارزی ها را **هم ارزی های نیوتن** می نامند. توجه داشته باشید که دو تابع را **هم ارز** گویند هرگاه حد برابر داشته باشند.

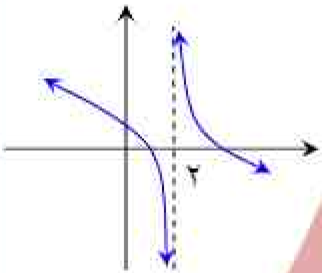
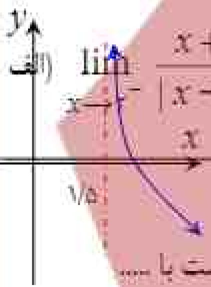
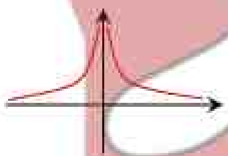
$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}\equiv\lim_{x\to+\infty}\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$$

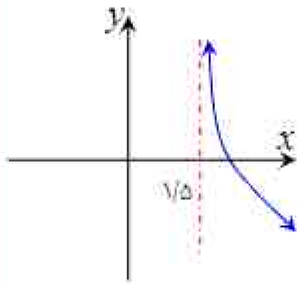
$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{ax^2+bx+c}\equiv-\lim_{x\to-\infty}\sqrt{a}\left(x+\frac{b}{2a}\right)$$

در این دو هم ارزی عدد a مثبت فرض شده است و اگر منفی باشد، تابع دارای حد نیست.

۱	حدود زیر را به دست آورید. ب) $\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^5+3x^2+1}{-3x^5+3x^2+3}$ الف) $\lim_{x\to2^+}\frac{2x+1}{4-x^2}$	دی ۹۷	۱/۵ نمره
۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. حاصل $\lim_{x\to3^+}\frac{x+1}{9-x^2}$ برابر با $-\infty$ است.	خرداد ۹۸	۰/۲۵ نمره
۳	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. حاصل حد $\lim_{x\to+\infty}\frac{3x+5}{x-2}$ برابر با .... است.	خرداد ۹۸	۰/۲۵ نمره
۴	حدود زیر را به دست آورید. ب) $\lim_{x\to-\infty}\frac{5x^3+2x-1}{-2x^3+4}$ الف) $\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$	تیر ۹۸	۱/۲۵ نمره
۵	با توجه به نمودار تابع f که در شکل زیر آورده شده است، به سئوالات زیر پاسخ دهید. ب) $\lim_{x\to+\infty}f(x)=....$ الف) $\lim_{x\to(-2)^-}f(x)=....$ 	شهریور ۹۸	۰/۵ نمره

۶	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{(x-1)^2}$ پ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^3+1}{2x^3-4x}$ ب) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-2x^3+x-1)$	شهریور ۹۸	۱/۷۵ نمره
۷	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب کامل کنید. حاصل $\lim\limits_{x\to +\infty} (3-2x-5x^4)$ برابر با .... است.	دی ۹۸	۰/۵ نمره
۸	حاصل حدهای زیر را به دست آورید. ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\frac{3x+1}{x-5}-\frac{2}{x})$ الف) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{[x]-2}{3-x}$	دی ۹۸	۱/۵ نمره
۹	حدود زیر را محاسبه کنید. ب) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{2x^2-x+1}{4x^3+2x-1}$ الف) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{x^2+x}{x^2}$	خرداد ۹۹	۲ نمره
۱۰	نمودار تابع f به صورت مقابل است.  الف : حدود زیر را محاسبه کنید. ب) $\lim\limits_{x\to a^-} \frac{-2x}{f(x)}$ الف) $\lim\limits_{x\to a^+} \frac{-2x}{f(x)}$ ب : نمودار تابع $y=\frac{-2x}{f(x)}$ در اطراف نقطه‌ی $x=a$ چگونه است؟	خرداد ۹۹ خ	۱/۲۵ نمره
۱۱	حد های زیر را به دست آورید. ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x-2x^2}{4x^3+2x-1}$ الف) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{[x]-2}{3-x}$	خرداد ۹۹ خ	۱ نمره
۱۲	حدود زیر را محاسبه کنید. ب) $\lim\limits_{x\to \pm\infty} \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+1}$ الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{x+1}{\tan x}$	شهریور ۹۹	۱/۵ نمره

ردیف	سؤال	تاریخ	بارم
۱۳	حد های زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{[x]+1}{x+1}$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x-x^3}{3x^2+2}$	دی ۹۹	۱ نمره
۱۴	در نمودار تابع $f(x)$ موارد زیر را مشخص کنید.  الف) $\lim\limits_{x\to2^+} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to2^-} f(x)$	دی ۹۹	۰/۵ نمره
۱۵	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x\to2^-}\frac{x+1}{\lvert x-2\rvert}$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{\frac{4}{x}-2}$ 	خرداد ۱۴۰۰	۱ نمره
۱۶	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. با توجه به شکل مقابل حد تابع $f(x)=\frac{1}{\lvert x\rvert}$ در نقطه‌ی $x=0$ برابر است با ..... 	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره
۱۷	حدهای زیر را محاسبه کنید. الف) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\sin5x+[-x]}{2x}$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{5-x}$	شهریور ۱۴۰۰	۲/۵ نمره
۱۸	حدهای زیر را در صورت وجود بیابید. الف) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\frac{[x]-2}{\lvert 3x-1\rvert}$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{4x+2}{5-x}-\frac{8}{x})$	دی ۱۴۰۰	۱ نمره

۱۹	جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. با توجه به نمودار تابع f، حاصل $\lim\limits_{x\to(۱/۵)^+} f(x)$  	دی ۱۴۰۰	۰/۵ نمره

***

مجانب افقی و مجانب قائم

فرض کنید که a یک عدد حقیقی باشد، خط $x=a$ را مجانب قائم نمودار تابع $f(x)$ گویند، هرگاه حداقل یکی از شرایط زیر برقرار باشد.

الف) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=+\infty$ ج) $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=-\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=+\infty$ د) $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=-\infty$

برای محاسبه‌ی مجانب قائم در توابع کسری، مخرج کسر را مساوی صفر قرار می دهیم، ریشه های مخرج مجانب قائم تابع f هستند، به شرط اینکه این ریشه ها، صورت را صفر نکنند[2].

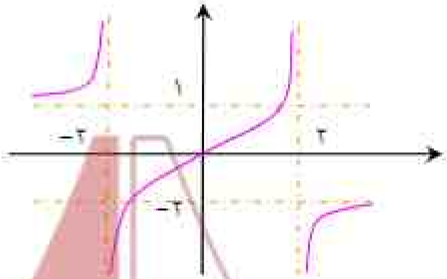
خط $y=L$ را مجانب نمودار $y=f(x)$ می نامیم، هرگاه حداقل یکی از دو شرط زیر برقرار باشد.

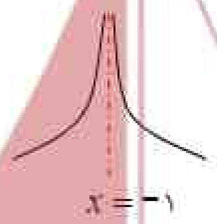
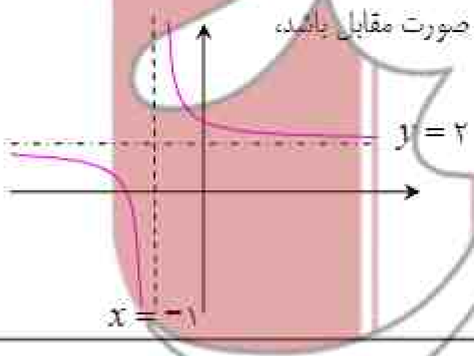
الف) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=L$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L$

برای محاسبه‌ی مجانب افقی یک تابع، کافی است که حد تابع را در بی نهایت (مثبت یا منفی یا هر دو) محاسبه کنیم و در صورتی که این حد عدد حقیقی L شود، معادله‌ی $y=L$ مجانب افقی تابع است.

۱	مجانب های قائم و افقی تابع $f(x)=\dfrac{۳x}{x^۲-۱}$ را بیابید.	دی ۹۷	۱/۵ نمره

[2] . در صورتی که صورت کسر توسط این ریشه صفر شود، حالت $\frac{0}{0}$ اتفاق می افتد که بعد از رفع ابهام، اگر حاصل حد تابع f در $x=a$ برابر $+\infty$ یا $-\infty$ شود، باز هم خط $x=a$ مجانب قائم نمودار تابع f است.

۲	کدام یک از خطوط $x=-1$ و $x=3$ مجانب قائم $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3}$ می باشد؟ دلیل پاسخ خود را بنویسید.	خرداد ۹۸	۱/۵ نمره
۳	با توجه به نمودار تابع f که در زیر آمده است، معادلات مجانب های افقی تابع را بنویسید.  	خرداد ۹۸	۰/۵ نمره
۴	مجانب های قائم و افقی تابع $f(x)=\dfrac{1+2x^2}{1-x^2}$ را بیابید.	تیر ۹۸	۱/۲۵ نمره
۵	مجانب قائم و افقی نمودار تابع $y=\dfrac{x+3}{2-x}$ را بنویسید.	شهریور ۹۸	۰/۷۵ نمره
۶	مجانب قائم و افقی نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x^2+x}{x^2-x}$ را بنویسید.	دی ۹۸	۱ نمره
۷	نمودار تابع f را به گونه ای رسم کنید که همه‌ی شرایط زیر را دارا باشد. الف : $f(1)=f(-2)=0$ ب : $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ ج : خط $y=-1$ مجانب افقی آن باشد.	خرداد ۹۹	۰/۵ نمره
۸	مجانب های قائم و افقی نمودار تابع $y=\dfrac{x}{x^2-4}$ را در صورت وجود بدست آورید.	خرداد ۹۹	۲ نمره
۹	نمودار تابع f را به گونه ای رسم کنید که همه‌ی شرایط زیر را دارا باشد. الف : $f(1)=f(-2)=0$ ب : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ ج : خط $y=-1$ مجانب افقی آن باشد.	خرداد ۹۹ خ	۱/۲۵ نمره
۱۰	مجانب های افقی و قائم تابع زیر را به دست آورید. $y=\dfrac{2x+5}{\lvert x\rvert-1}$	خرداد ۹۹ خ	۱/۵ نمره

۱۱	مجانب های قائم و افقی نمودار تابع $y=\dfrac{1+2x^2}{1-x^2}$ را در صورت وجود به دست آورید.	شهریور۹۹	۲ نمره
۱۲	نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x+1}{x^3+x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن به چه صورتی می باشد؟	شهریور۹۹	۱ نمره
۱۳	اگر رفتار تابع $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+bx+c}$ در اطراف نقطه‌ی $x=-1$ به صورت شکل زیر باشد، مقادیر b و c را به دست آورید. 	شهریور۹۹	۱ نمره
۱۴	مجانب های قائم و افقی نمودار تابع $f(x)=\dfrac{4x^3+1}{2x^3+x}$ را در صورت وجود بیابید.	دی ۹۹	۱/۵ نمره
۱۵	مجانب های قائم و افقی نمودار تابع $f(x)=\dfrac{1-2x^2}{x^2-1}$ را در صورت وجود بیابید.	خرداد ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره
۱۶	اگر نمودار تابع $f(x)=\dfrac{(a+1)x+7}{2x+b}$ به صورت مقابل باشد، آنگاه مقدار b و a را پیدا کنید. 	شهریور ۱۴۰۰	۱ نمره
۱۷	مجانب های قائم و افقی منحنی تابع $y=\dfrac{x+1}{x^2+3}$ را در صورت وجود بیابید.	شهریور ۱۴۰۰	۱ نمره
۱۸	مجانب های قائم و افقی منحنی تابع $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$ را در صورت وجود بیابید.	دی ۱۴۰۰	۱/۵ نمره

((فصل چهارم : مشتق))

***

مفهوم مشتق

اگر $y=f(x)$ یک تابع پیوسته در نقطه‌ی $x=a$ باشد. در این صورت مشتق تـابع $y=f(x)$ در نقطـه‌ی $x=a$ را به صورت زیر تعریف می کنند و آنرا با $f'(a)$ یا $\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a}$ نمایش می دهند.

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

۱	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. مشتق تابع $f(x)=\sqrt{۲x-۱}$ در نقطه ای به طول یک روی منحنی تابع، عدد .... است.	دی ۹۷	۰/۲۵ نمره
۲	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. مشتق تابع $f(x)=\frac{x}{x+۱}$ در نقطه ای به طول ۲ روی منحنی تابع، عدد .... است.	تیر ۹۸	۰/۲۵ نمره
۳			

محاسبه‌ی مشتق تابع در یک نقطه

مشتق تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$، با شیب خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه برابر است.

$m=f'(a)$

معادله ی خط مماس بر نمودار تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ از رابطه‌ی زیر به دست می آید.

$y=m(x-a)+b$

۱	اگر $f(x)=x^۲-۳x$ باشد، با استفاده از تعریف $f'(۱)$ را حساب کنید.	تیر ۹۸	۱ نمره

۲	با استفاده از تعریف مشتق، معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ را در نقطه‌ی $x=۳$ به دست آورید.	خرداد ۹۹ خ	۱/۵ نمره
۳	اگر $f(x)=x^{۲}-۳x$ باشد، با استفاده از تعریف مشتق $f'(۱)$ را حساب کنید.	شهریور۹۹	۱/۲۵ نمره
۴	شیب خط مماس بر منحنی $y=۱-۵x^{۲}-۲x$ در نقطه ای به طول ۲- واقع بر آن برابر .... است.	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

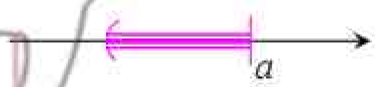
مشتق پذیری و پیوستگی

اگر تابع f در نقطه‌ی a و یک همسایگی راست a تعریف شده باشد، حد یک طرفه‌ی $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ را در صورت وجود، **مشتق راست** تابع f در نقطه‌ی a می نامند و آن را با نماد $f'_+(a)$ نمایش می دهند.

مشتق راست $f'_+(a)=\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$

اگر تابع f در نقطه‌ی a و یک همسایگی چپ a تعریف شده باشد، حد یک طرفه‌ی $\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ را در صورت وجود، **مشتق چپ** تابع f در نقطه‌ی a می نامند و آن را با نماد $f'_-(a)$ نمایش می دهند.

مشتق چپ $f'_-(a)=\lim\limits_{x\to a^-}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$



تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ مشتق پذیر گویند هرگاه:

الف) در این نقطه پیوسته باشد. ($\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^-}f(x)=f(a)$)

ب) مشتق راست و مشتق چپ آن در این نقطه موجود و برابر باشند. ($f'_+(a)=f'_-(a)$)

در غیر این صورت تابع در نقطه‌ی $x=a$ مشتق پذیر نیست.

قضیه : اگر تابعی در یک نقطه مشتق پذیر باشد، آنگاه در آن نقطه نیز پیوسته خواهد بود.

توجه :

۱ : عکس قضیه‌ی فوق الزاماً برقرار نیست. یعنی ممکن است یک تابع در یک نقطه پیوسته باشد ولی در ان نقطه مشتق پذیر نیست. مانند تابع $f(x)=|x|$ که در نقطه‌ی $x=0$ پیوسته است ولی در این نقطه مشتق پذیر نیست.

۲ : اگر تابعی در یک نقطه پیوسته نباشد، در آن نقطه مشتق پذیر نیست.

نتیجه : در هر یک از موارد زیر ، یک تابع در یک نقطه مانند $x=a$ مشتق پذیر نیست.

۱ : تابع در این نقطه پیوسته نباشد.

۲ : تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق راست و چپ تابع در این نقطه موجود (متناهی) ولی برابر نباشند.

در این مورد نقطه‌ی داده شده را **نقطه‌ی گوشه ای** (نقطه‌ی زاویه دار) می گویند و خطوط مماس را **نیم مماس چپ** و **نیم مماس راست** می نامند.

۳ : تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق راست یا چپ تابع در این نقطه یکی عدد (متناهی) و دیگری بی نهایت(نامتناهی) شود.

در این مورد نیز نقطه‌ی داده شده را **نقطه‌ی گوشه ای** (نقطه‌ی زاویه دار) می گویند و خطوط مماس را **نیم مماس چپ** و **نیم مماس راست** می نامند.

۴ : تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق راست یا چپ تابع یکی $+\infty$ و دیگری $-\infty$ شود.

۵ : تابع در این نقطه پیوسته است ولی مشتق راست یا چپ تابع هر دو $+\infty$ یا هر دو $-\infty$ شوند.

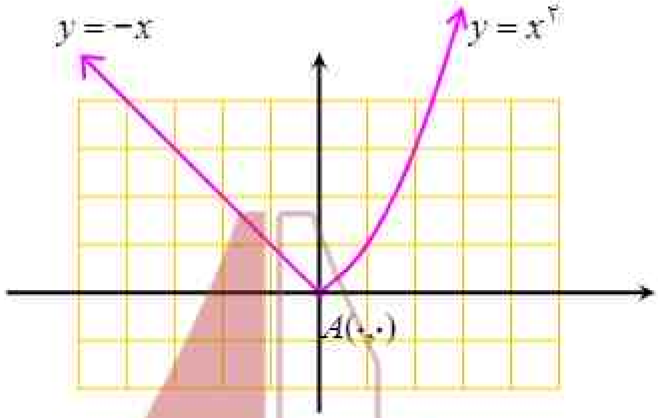
توجه :

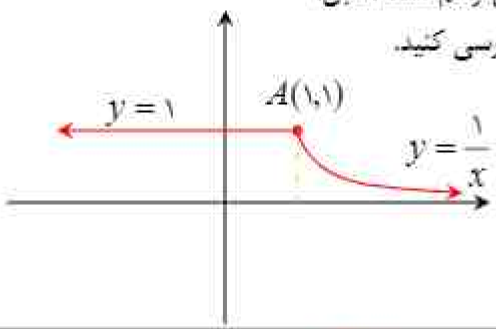
۱ : اگر تابعی در همسایگی (راست یا چپ) این نقطه تعریف نشده باشد تابع در آن نقطه پیوسته نیست و لذا مشتق پذیر نمی باشد.

۲ : اگر تابع f در a پیوسته بوده و $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}=+\infty \ \vee\ -\infty$

باشد، آنگاه خط $x=a$ که از نقطه‌ی $A(a,f(a))$ می گذرد و **خط مماس قائم** بر نمودار f گفته می شود.

۱	مشتق پذیری تابع $f(x)=\|x-2\|$ را در $x=2$ بررسی کنید.	دی ۹۷	۱ نمره
۲	نشان دهید، نقطه‌ی به طول $x=-1$ ، نقطه‌ی گوشه ای برای تابع $f(x)=\|x^2+x\|$ می باشد.	خرداد ۹۸	۱/۷۵ نمره
۳	**قضیه :** ثابت کنید اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد،آنگاه f در $x=a$ پیوسته است.	خرداد ۹۸	۱/۲۵ نمره
۴	نشان دهید $x=0$ مماس قائم برای تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ است.	تیر ۹۸	۰/۷۵ نمره
۵	مشتق پذیری تابع $f(x)=\|x^2-4\|$ را در $x=2$ بررسی کنید.	شهریور ۹۸	۲ نمره
۶	مشتق پذیری تابع مقابل را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید. $f(x)=\begin{cases} x^2+3 & x\geq 1 \\ 3x+1 & x<1 \end{cases}$	دی ۹۸	۱/۲۵ نمره
۷	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر تابع f در $x=a$ پیوسته نباشد، در آنگاه f در a مشتق پذیر هم نیست.	خرداد ۹۹	۰/۲۵ نمره
۸	مشتق پذیری تابع $f(x)=\|x^2-1\|$ را در $x=1$ بررسی کنید.	خرداد ۹۹	۲ نمره
۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابع $f(x)=\|x\|$ در نقطه‌ی $x=0$ مشتق پذیر نیست.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۱۰	جای خالی را کامل کنید. خط $x=1$ بر منحنی $f(x)=\sqrt[3]{x-1}$ ، ...... است.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره

۱۱	با محاسبه‌ی مشتق چپ و راست در نقطه‌ی A، نشان دهید که تابع در نقطه‌ی A مشتق پذیر نیست.  	خرداد ۹۹ خ	۱/۵ نمره
۱۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. اگر تابع f در $x=a$ پیوسته باشد، آنگاه در این نقطه مشتق پذیر است.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۱۳	تابع $f(x)=\begin{cases} ax+b & x>1 \\ x^2-2x & x\leq 1 \end{cases}$ در $x=1$ مشتق پذیر است. حاصل a و b را به دست آورید.	خرداد ۹۹ خ	۱ نمره
۱۴	مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\leq 0 \\ x & x>0 \end{cases}$ را در $x=0$ بررسی کنید.	شهریور ۹۹	۲ نمره
۱۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. خط $x=1$ مماس قائم منحنی $f(x)=\sqrt[3]{x}$ است.	شهریور ۹۹	۰/۲۵ نمره
۱۶	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. اگر خط $x=a$ مماس قائم بر منحنی تابع $f(x)$ در نقطه‌ی $(a,f(a))$ باشد، آنگاه $f'(a)$ موجود است.	دی ۹۹	۰/۲۵ نمره
۱۷	مشتق پذیری تابع $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 1 \\ 2x & x<1 \end{cases}$ را در نقطه‌ی $x=1$ بررسی کنید.	دی ۹۹	۱/۵ نمره
۱۸	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. اگر تابع f در $x=a$ مشتق پذیر باشد، آنگاه f در a .... است.	خرداد ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

۱۹	با محاسبه‌ی مشتق راست و مشتق چپ تابع رسم شده مقابل: مشتق پذیری تابع را در نقطه‌ی $A(1,1)$ بررسی کنید.  	خرداد ۱۴۰۰	۱ نمره
۲۰	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. تابع $f(x)=[x]$ در نقطه‌ی $x=0$ مشتق پذیر است.	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره
۲۱	مشتق پذیری تابع $f(x)=4x(1-\|x\|)$ را در نقطه‌ی $x=0$ بررسی کنید.	شهریور ۱۴۰۰	۱/۵ نمره
۲۲	در تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x<-1\\ x+2 & x\ge -1\end{cases}$، نشان دهید $f'_+(-1)$ و $f'_-(-1)$ موجودند. ولی $f'(-1)$ موجود نیست، ولی $f'(-1)$ موجود نیست.	دی ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

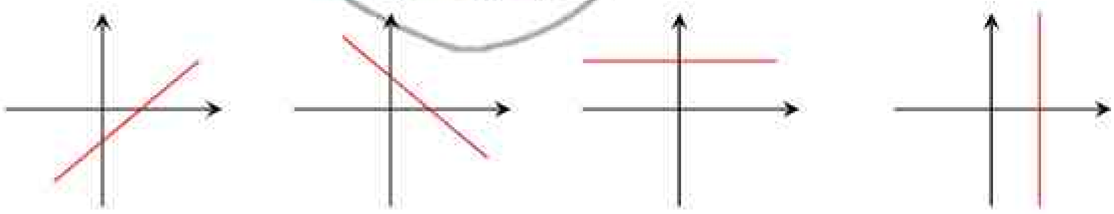
تعبیر هندسی مشتق

مشتق تابع $y=f(x)$ در نقطه‌ی $x=a$ با شیب خط مماس بر نمودار تابع در این نقطه برابر است.

$m=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ شیب خط مماس در صورت وجود

همچنین

$m=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ شیب خط مماس در صورت وجود

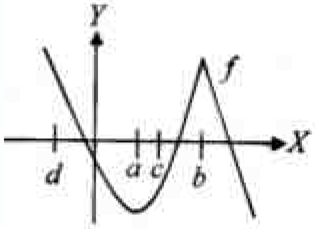
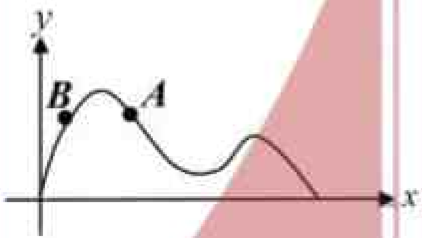
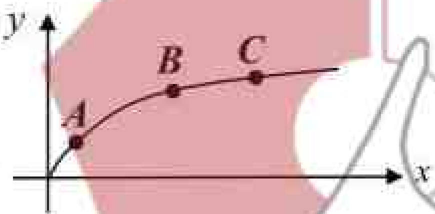
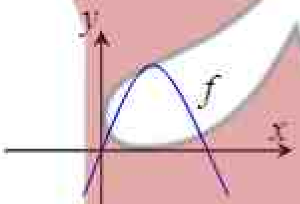
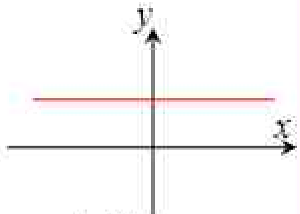
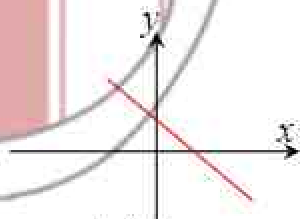
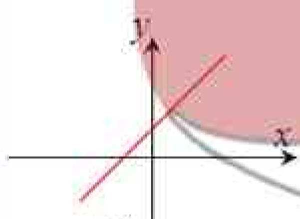


شیب خط تعریف نشده

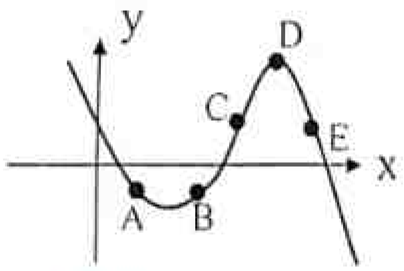
شیب خط صفر است

شیب خط منفی است

شیب خط مثبت است

۱	با در نظر گرفتن نمودار f در شکل، به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف : طول نقطه ای که مماس در آن افقی باشد. ب : طول نقطه ای که مشتق در آن مقداری منفی است. پ : طول نقطه ای که تابع در آن مشتق پذیر نیست. 	دی ۹۷	۰/۷۵ نمره
۲	درستی یا نادرستی عبارت زیر را با توجه به شکل داده شده، مشخص کنید. در شکل روبرو، شیب خطوط مماس در نقاط A و B مثبت است. 	خرداد ۹۸	۰/۲۵ نمره
۳	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. با توجه به شکل روبرو، شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی .... بزرگتر از شیب خط مماس بر منحنی در نقطه‌ی B است. 	خرداد ۹۸	۰/۲۵ نمره
۴	نمودار تابع f در شکل روبرو آمده است. با بیان دلیل، مشخص کنید کدامیک از نمودار های زیر، نمودار مشتق تابع f است.   (الف)  (ب)  (ج)	خرداد ۹۸	۰/۷۵ نمره

۵ نقاط داده شده روی منحنی زیر را با شیب ارائه شده در جدول نظیر کنید.



نقطه	شیب
	۰
	۲
	۰/۵
	−۰/۵

تیر ۹۸ — ۱ نمره

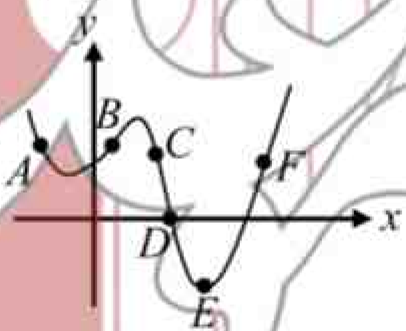
۶ با توجه به نمودار داده شده، گزینه‌ی مناسب را انتخاب کنید.

i) در کدام نقطه، مماس افقی بر نمودار رسم می‌شود؟ الف) B ب) E

ii) شیب خط مماس در نقطه‌ی F چه علامتی دارد؟ الف) مثبت ب) منفی

iii) شیب خط مماس بر نمودار، در نقطه‌ی D نسبت به نقطه‌ی B چگونه است؟

الف) بیشتر ب) کمتر

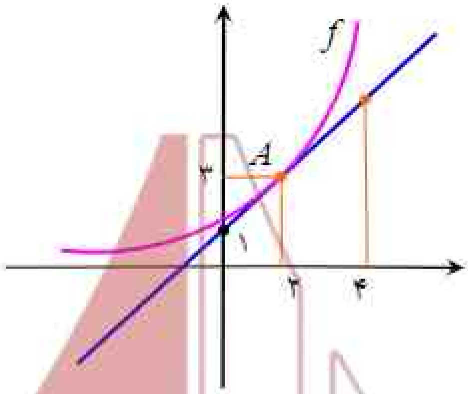


شهریور ۹۸ — ۰/۷۵ نمره

۷ در شکل روبرو نمودار تابع $f(x)$ و خط مماس بر منحنی آن در نقطه‌ی $x=۲$ داده شده است.

الف : مشتق تابع $f(x)$ ، در نقطه‌ی $x=۲$ را بیابید.

ب : معادله‌ی خط مماس بر نمودار تابع در نقطه‌ی A را بنویسید.

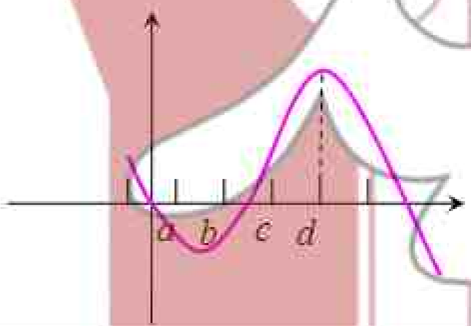


دی ۹۸ — ۱ نمره

۸ معادله‌ی خط مماس بر منحنی $f(x)=-x^{۲}+۱۰x$ را در نقطه‌ی $A(۲,f(۲))$ واقع بر نمودار تابع بنویسید.

خرداد ۹۹ — ۱/۵ نمره

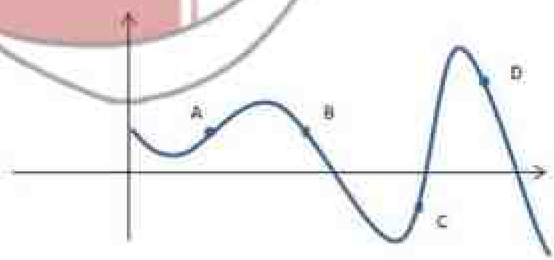
۹ با در نظر گرفتن نمودار f در شکل زیر، نقاط a و b و c و d را با مشتق های داده شده در جدول نظیر کنید.



x	$f(x)$
	۰
	۰/۵
	۲
	−۰/۵

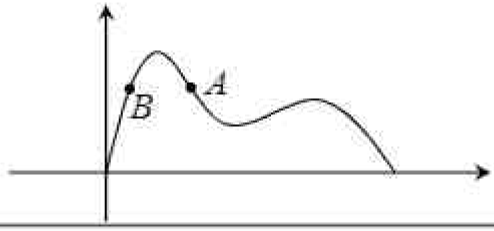
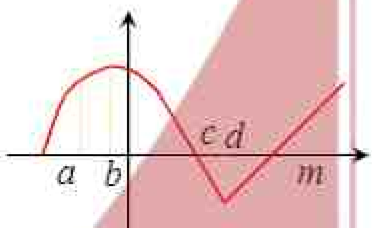
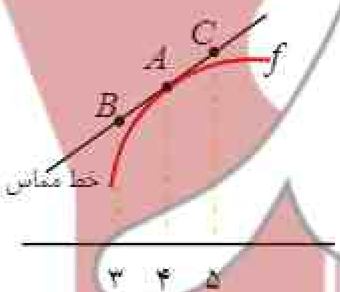
خرداد ۹۹ خ — ۱ نمره

۱۰ با توجه به نمودار زیر جدول را کامل کنید.



شیب	−۲	−۱	۰/۵	۲
نقطه				

خرداد ۹۹ خ — ۱ نمره

۱۱	در نمودار $y=f(x)$ شیب نمودار در نقاط B و A و شیب خط AB را از کوچکترین به بزرگترین مرتب کنید. 	دی ۹۹	۱ نمره
۱۲	معادله‌ی خط مماس بر منحنی تابع $f(x)=x^{۳}-۲x$ را در نقطه‌ی $A(۱,f(۱))$ به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۰	۱/۵ نمره
۱۳	با توجه به نمودار f به سئوالات زیر پاسخ دهید. الف) طول نقطه ای که مشتق در آن صفر است را بنویسید. ب) طول نقطه‌ی گوشه ای را بنویسید. پ) طول نقطه ای که در آن مقدار تابع و شیب خط هر دو منفی است را بنویسید. 	خرداد ۱۴۰۰	۰/۷۵ نمره
۱۴	برای تابع f در شکل مقابل داریم، اگر $f'(۴)=۱/۵$ و $f(۴)=۲۵$ با توجه به شکل، مختصات نقاط A ، B و C را بیابید. 	دی ۱۴۰۰	۱ نمره

محاسبه‌ی مشتق

قضیه : اگر $f(x)=k$ یک تابع ثابت باشد. ثابت کنید که $f'(a)=۰$

قضیه : اگر $f(x)=x$ یک تابع همانی باشد. ثابت کنید که $f'(a)=۱$

قضیه : اگر توابع g و f در نقطه‌ی a مشتق پذیر باشند. در این صورت:

(۱) تابع kf نیز در a مشتق پذیر است و $(kf)'(a)=kf'(a)$

(۲) تابع $f+g$ نیز در a مشتق پذیر است و $(f+g)'(a)=f'(a)+g'(a)$

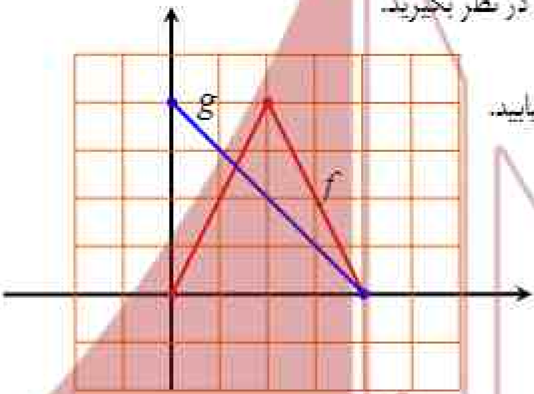
(۳) تابع $f-g$ نیز در a مشتق پذیر است و $(f-g)'(a)=f'(a)-g'(a)$

(۴) تابع fg نیز در a مشتق پذیر است و $(fg)'(a)=f'(a)g(a)+f(a)g'(a)$

(۵) تابع $\frac{۱}{f}$ نیز (به شرط $f(a)\neq ۰$) در a مشتق پذیر است و $(\frac{۱}{f})'(a)=-\frac{f'(a)}{f^{۲}(a)}$

(۶) تابع $\frac{f}{g}$ نیز (به شرط $g(a)\neq ۰$) در a مشتق پذیر است و $(\frac{f}{g})'(a)=\frac{f'(a)g(a)-g'(a)f(a)}{g^{۲}(a)}$

قضیه : فرض کنید تابع g در نقطه‌ی a و تابع f در $g(a)$ مشتق پذیر باشند، در این صورت تابع fog در a مشتق پذیر است و $(fog)'(a)=g'(a)f'(g(a))$

ردیف	سوال	تاریخ	نمره
۱	اگر f و g توابع مشتق پذیر باشند $f(۲)=۳$ و $f'(۲)=۱$ و $g(۲)=-۳$ و $g'(۲)=۲$ مقادیر $(fg)'(۲)$ و $(f+g)'(۲)$ را به دست آورید.	دی ۹۷	۱/۲۵ نمره
۲	جای خالی را با عدد یا کلمه‌ی مناسب کامل کنید. اگر $f'(۲)=-۱$ و $g'(۲)=۳$ ، در این صورت $(۲f+۳g)'(۲)$ برابر با .... است.	دی ۹۸	۰/۵ نمره
۳	نمودار توابع f و g را در شکل مقابل در نظر بگیرید. اگر $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ باشد، $h'(۱)$ را بیابید. 	دی ۹۸	۱ نمره
۴	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب را بنویسید. اگر $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$، در این صورت $(۳f+۲g)'(۱)$ برابر با ..... است.	خرداد ۹۹	۰/۲۵ نمره
۵	اگر توابع f و g مشتق پذیر باشند و $f'(۱)=۳$ و $g'(۱)=۵$ مقادیر $(۳f+۲g)'(۱)$ را به دست آورید.	خرداد ۹۹ خ	۱ نمره

مشتق گیری از توابع

تابع مشتق

اگر x عضو از دامنه‌ی تابع $y=f(x)$ باشد و تابع f در x مشتق پذیر باشد. در این صورت متناظر آن تابع دیگری تحت عنوان تابع مشتق (مشتق اول) به صورت زیر تعریف می شود.

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

تابع مشتق را به اختصار مشتق تابع می نامیم و آن را به صورت $f'(x)$ یا y' یا $\frac{df}{dx}$ نمایش می دهیم.

دامنه‌ی تابع مشتق زیر مجموعه ای از دامنه‌ی تابع f است که در آن تابع مشتق پذیر باشد. یعنی

$D_{f'}=D_f-\{$ نقاط مشتق ناپذیر تابع $f\}$

الف : فرمول های مقدماتی

ردیف	تابع	مشتق

۱	$y = a$	$y' = 0$
۲	$y = ax$	$y' = a$
۳	$y = ax^n$	$y' = anx^{n-1}$
۴	$y = \frac{1}{x}$	$y' = \frac{-1}{x^2}$
۵	$y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
۶	$y = \sqrt[m]{x^n}$	$y' = \frac{n}{m\sqrt[m]{x^{m-n}}}$
۷	$y = \sin x$	$y' = \cos x$
۸	$y = \cos x$	$y' = -\sin x$
۹	$y = \tan x$	$y' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$
۱۰	$y = \cot x$	$y' = -(1 + \cot^2 x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$

ب : فرمول های تکمیلی (روش های مشتق گیری)

فرض کنید که u و v و ... توابعی بر حسب متغیر x باشند. در این صورت می توان فرمول های زیر را نیز بیان کرد.

ردیف	تابع	مشتق
۱	$y = au$	$y' = au'$
۲	$y = u + v + \dots$	$y' = u' + v' + \dots$
۳	$y = u.v$	$y' = u'v + v'u$
۴	$y = u.v.w$	$y' = u'.v.w + v'.u.w + w'.u.v$
۵	$y = u^n$	$y' = nu'u^{n-1}$
۶	$y = \frac{1}{v}$	$y' = \frac{-v'}{v^2}$
۷	$y = \frac{u}{v}$	$y' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$
۸	$y = \sqrt{u}$	$y' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
۹	$y = \sqrt[m]{u^n}$	$y' = \frac{n.u'}{m\sqrt[m]{u^{m-n}}}$
۱۰	$y = f(u)$	$y' = u'.f'(u)$
۱۱	$y = \sin u$	$y' = u'.\cos u$
۱۲	$y = \cos u$	$y' = -u'.\sin u$

۱۳	$y=\tan u$	$y'=u'(1+\tan^2 u)=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$
۱۴	$y=\cot u$	$y'=-u'(1+\cot^2 u)=-\dfrac{u'}{\sin^2 u}$

۱	مشتق توابع زیر را به دست آورید.(ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $y=\dfrac{x^2+1}{x^3+2x-5}$ ب) $y=\cos^2(-3x+1)$	دی ۹۷	۲ نمره
۲	مشتق توابع زیر را به دست آورید.(ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $y=\dfrac{x^2-1}{x^3+2x+1}$ ب) $y=\cos^3(2x)$	خرداد ۹۸	۱/۷۵ نمره
۳	مشتق توابع زیر را به دست آورید.(ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $y=\dfrac{x^2-1}{5x^3-3x+1}$ ب) $y=\sin^2(2x+1)$	تیر ۹۸	۲ نمره
۴	مشتق توابع زیر را به دست آورید. الف) $f(x)=(2x^3+\sqrt[3]{x}-1)^4$ ب) $g(x)=\cos(\dfrac{x}{x^2+1})$	شهریور ۹۸	۲/۲۵ نمره
۵	مشتق توابع زیر را به دست آورید.(ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $y=\dfrac{2x+3}{x^3-2x^2}$ ب) $y=\sin^3(2x+1)$	دی ۹۸	۱/۷۵ نمره
۶	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+1}{-3x+2}$ ب) $g(x)=\sqrt{x}(3x^2+5)$ پ) $h(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$	خرداد ۹۹	۳ نمره
۷	مشتق توابع زیر را محاسبه کنید. (ساده کردن الزامی نمی باشد.) الف) $f(x)=(x^2+1)^3(5x-1)$ ب) $f(x)=\dfrac{5\cos x}{1-\sin x}$	خرداد ۹۹ خ	۲/۲۵ نمره
۸	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=2\sqrt{x}(5x^2-3x)$ ب) $g(x)=\sin 3x+\cos^2(4x^3-2)$	خرداد ۹۹ خ	۲ نمره

ردیف	سؤال	تاریخ	نمره
۹	مشتق هر یک از توابع زیر را به دست آورید.(ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=(\sqrt{3x+2})(x^3+1)$ ب) $g(x)=(x^2+3x+1)^7$ پ) $h(x)=\dfrac{x^2-5x+7}{-2x+9}$	شهریور ۹۹	۳ نمره
۱۰	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=(4x^3-7)(2x-1)^4$ ب) $g(x)=\dfrac{1-\sin x}{\cos x}$	دی ۹۹	۲ نمره
۱۱	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=(\sqrt{3x}+1)(2x^2-1)$ ب) $g(x)=3\tan^2 x+\cos x^2$ پ) $h(x)=\dfrac{x^3-3x}{5x}$	خرداد ۱۴۰۰	۲/۵ نمره
۱۲	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست الف) $f(x)=\dfrac{4\sin\frac{x}{2}}{x^2+\sqrt{x}}$ ب) $g(x)=3x(x^2-6x)^3+\cos 2x$	شهریور ۱۴۰۰	۲/۵ نمره
۱۳	جای خالی را با عدد یا کلمه مناسب کامل کنید. اگر $f'(5)=2$ و $g'(5)=-1$ در این صورت $(2f-g)'(5)$ برابر با ...... است.	دی ۱۴۰۰	۱ نمره
۱۴	مشتق توابع زیر را به دست آورید. (ساده کردن مشتق الزامی نیست.) الف) $f(x)=(x^2-6)^3(\frac{1}{4}x+1)$ ب) $g(x)=\sin^3(5x)$ پ) $h(x)=\dfrac{\sqrt{x}}{x^3-2x+1}$	دی ۱۴۰۰	۲/۲۵ نمره

مشتق تابع مرکب و قاعده زنجیری

اگر y تابعی از u و u تابعی از x باشد، آنگاه مشتق y نسبت به x برابر است با حاصل ضرب مشتق y نسبت به u در مشتق u نسبت به x یعنی

$$y=f(u)\rightarrow y'=u'f'(u)$$

یا به نمادی دیگر

			۱

مشتق پذیری روی یک بازه

برای بررسی مشتق پذیری تابع در یک بازه می توان از تعاریف زیر استفاده نمود.

تابع f را روی بازه‌ی (a,b) مشتق پذیر گویند، هرگاه در هر نقطه از این بازه مشتق پذیر باشد.

تابع f را روی بازه‌ی $[a,b]$ مشتق پذیر گویند، هرگاه در بازه‌ی (a,b) مشتق پذیر بوده و در نقطه‌ی آن a مشتق راست و در نقطه‌ی b مشتق چپ داشته باشد.

تابع f را روی بازه‌ی $[a,b)$ مشتق پذیر گویند، هرگاه در بازه‌ی (a,b) مشتق پذیر بوده و در نقطه‌ی آن a مشتق راست داشته باشد.

تابع f را روی بازه‌ی $(a,b]$ مشتق پذیر گویند، هرگاه در بازه‌ی (a,b) مشتق پذیر بوده و در نقطه‌ی b مشتق چپ داشته باشد.

۱/۲۵ نمره	تیر ۹۸	نمودار تابع زیر را رسم کرده و مشتق پذیری f را روی بازه‌ی $[-۲,۰]$ بررسی کنید. $f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x+۱ & -۱\le x<۲ \end{cases}$	۱

مشتق مرتبه دوم

تابع مشتق هر تابعی را مشتق مرتبه‌ی اوّل می نامند. حال اگر از مشتق تابعی، مشتق دیگری گرفته شود، مشتق مرتبه‌ی دوّم بدست می آید

۱ نمره	شهریور ۹۹	اگر $f(x)=\sin^{۲} x-\cos ۲x$ مقدار $f''(\frac{\pi}{۶})$ را حساب کنید.	۱

آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه ای تغییر

الف : آهنگ متوسط تغییرات

آهنگ متوسط تغییرات تابع f نسبت به تغییرات x، وقتی x از $x=a$ تا $x=b$ تغییر کند، برابر است با :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

ب : آهنگ تغییرات آنی (لحظه ای)

حد آهنگ تغییرات متوسط تابع f نسبت به تغییرات x وقتی تغییر x خیلی ناچیز ($h\to 0$) باشد، را آهنگ لحظه ای یا به اختصار آهنگ تغییر کمیت $y=f(x)$ به کمیت x در a می گویند.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

تذکر: با توجه به تعریف مشتق تابع در یک نقطه واضح است که

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(a)$$

۱	یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+t^{۲}$ گرم است. آهنگ جرم توده ی باکتری در لحظه‌ی $t=۹$ چقدر است؟	دی ۹۷	۰/۷۵ نمره
۲	آهنگ تغییر متوسط تابع $f(x)=x^{۲}-۲x$ را در بازه‌ی $[۰,۲]$ و آهنگ تغییر لحظه ای تابع f را در $x=۱$ محاسبه کنید.	خرداد ۹۸	۱ نمره
۳	یک توده‌ی باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+۳t^{۲}$ گرم است. آهنگ رشد جرم توده‌ی باکتری در لحظه‌ی $t=۴$ چقدر است؟	تیر ۹۸	۰/۷۵ نمره
۴	آهنگ تغییر لحظه ای تابع $f(x)=۲x^{۲}+۵x+۱$ در نقطه‌ی $x=۲$ چند برابر آهنگ تغییر لحظه ای آن در $x=-۱$ است؟	شهریور ۹۸	۱ نمره
۵	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. سرعت لحظه ای در $t=۲$ برای متحرکی با معادله‌ی حرکت $f(t)=t^{۲}+۳t$ برابر ۷ است.	دی ۹۸	۰/۵ نمره
۶	معادله‌ی حرکت متحرکی به صورت $f(t)=t^{۲}-t+۱۰$ بر حسب متر در بازه‌ی زمانی $[۰,۵]$ بر حسب ثانیه داده شده است. در کدام لحظه سرعت لحظه ای با سرعت متوسط در بازه‌ی زمانی $[۰,۵]$ برابر است؟	خرداد ۹۹	۱/۵ نمره
۷	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. آهنگ لحظه ای تغییر تابع $g(x)=۲\sin ۲x$ نسبت به x در $x=\frac{\pi}{۲}$ برابر ...... است.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره

۸	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. آهنگ متوسط تغییر با شیب قاطع و آهنگ لحظه ای تغییر با شیب خط مماس در آن نقطه برابرند.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۹	یک توده باکتری پس از t ساعت دارای جرم $m(t)=\sqrt{t}+t^{۲}$ گرم است. الف : جرم این توده باکتری در بازه‌ی زمانی $۳ \leq t \leq ۴$ به چه سرعتی افزایش می یابد؟ ب : آهنگ رشد جرم توده‌ی باکتری در لحظه‌ی $t=۹$ چقدر است؟	خرداد ۹۹ خ	۱/۲۵ نمره
۱۰	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. سرعت لحظه ای در $t=۹$ برای متحرکی با معادله‌ی حرکت $f(t)=\sqrt{t}$ برابر ..... است.	شهریور ۹۹	۰/۵ نمره
۱۱	جسمی از سطح زمین به طور عمودی پرتاب شده است. معادله‌ی ارتفاع آن از سطح زمین به صورت $f(t)=-۲t^{۲}+۱۰t$ می باشد. سرعت لحظه ای این جسم را در $t=۲$ به دست آورید.	دی ۹۹	۱ نمره
۱۲	جسمی را از ارتفاع سطح زمین به طور عمودی پرتاب می کنیم. جهت حرکت به طرف بالا را مثبت در نظر می گیریم. فرض کنید ارتفاع این جسم از سطح زمین در هر لحظه از معادله-ی $h(t)=-۵t^{۲}+۴۰t$ به دست می آید. مطلوب است : الف : سرعت متوسط در بازه‌ی $[۱,۲]$ ب : سرعت لحظه ای در زمان $t=۲$	خرداد ۱۴۰۰	۱ نمره
۱۳	تابعی با ضابطه‌ی $f(t)=\frac{۲۴۰}{t}$ مفروض است. آهنگ لحظه ای تغییر تابع f در لحظه-ی $t=۴$ از آهنگ متوسط تغییر f از لحظه‌ی $t=۳$ تا $t=۵$ چه مقدار بیشتر است؟	شهریور ۱۴۰۰	۱/۵ نمره
۱۴	دوچرخه سواری طبق معادله‌ی $d(t)=\frac{۱}{۲}t^{۲}+۱۰t$ حرکت می کند. سرعت لحظه ای این متحرک را در $t=۲$ به دست آورید.	دی ۱۴۰۰	۱ نمره

((فصل پنجم : کاربردهای مشتق))

***

اکسترمم های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

کاربرد مشتق در تشخیص یکنوایی توابع

فرض کنید تابع f بر روی بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و بر بازه‌ی (a,b) مشتق پذیر باشد. در این صورت :

الف : اگر به ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x) > 0$ ، آنگاه تابع بر $[a,b]$ اکیداً صعودی است.

ب : اگر به ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x) < 0$ ، آنگاه تابع بر $[a,b]$ اکیداً نزولی است.

ج : اگر به ازای هر $x \in (a,b)$ داشته باشیم $f'(x) = 0$ ، آنگاه تابع بر $[a,b]$ ثابت است.

توجه : شرط استفاده از قضیه‌ی فوق آن است که تابع f بر بازه‌ی $[a,b]$ پیوسته و بر بازه‌ی (a,b) مشتق پذیر باشد.

نقاط و مقدار های اکسترمم مطلق (سراسری)

نقطه‌ی $c \in D_f$ را نقطه‌ی مینیمم مطلق (سراسری) تابع f گویند، هرگاه به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(c) \le f(x)$. همچنین مقدار $f(c)$ را مقدار مینیمم مطلق تابع f می نامند. (به عبارت دیگر نقطه‌ی $(c, f(c))$ نقطه‌ی مینیمم مطلق تابع f است، هرگاه این نقطه از هیچ یک از نقاط واقع بر نمودار تابع f، بالاتر نباشد.)

نقطه‌ی $c \in D_f$ را نقطه‌ی ماکزیمم مطلق (سراسری) تابع f گویند، هرگاه به ازای هر $x \in D_f$ داشته باشیم $f(c) \ge f(x)$. همچنین مقدار $f(c)$ را مقدار ماکزیمم مطلق تابع f می نامند. (به عبارت دیگر نقطه‌ی $(c, f(c))$ نقطه‌ی ماکزیمم مطلق تابع f است، هرگاه این نقطه از هیچ یک از نقاط واقع بر نمودار تابع f، پایین تر نباشد.)

نقاط بحرانی تابع

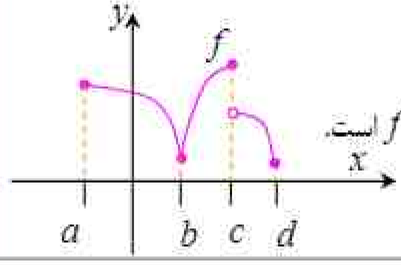
نقطه‌ی $c \in D_f$ را نقطه‌ی بحرانی تابع f می نامیم، هرگاه یا $f'(c)$ موجود نباشد یا $f'(c) = 0$

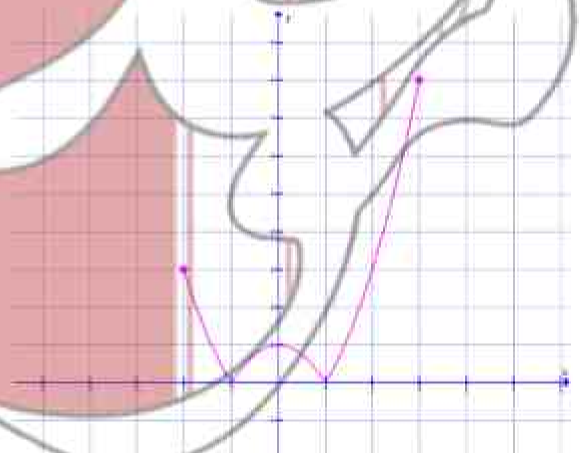
نقاط و مقدار های اکسترمم نسبی (موضعی)

اگر تابع f روی بازه‌ی باز I تعریف شده باشد و نقطه ای مانند $c \in I$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \le f(x)$. آنگاه گوییم تابع f در نقطه‌ی c مینیمم نسبی (موضعی) دارد. c را نقطه‌ی مینیمم نسبی و $f(c)$ را مقدار مینیمم نسبی تابع می نامند.

اگر تابع f روی بازه‌ی باز I تعریف شده باشد و نقطه ای مانند $c \in I$ وجود داشته باشد که برای هر $x \in I$ داشته باشیم $f(c) \ge f(x)$. آنگاه گوییم تابع f در نقطه‌ی c ماکزیمم نسبی (موضعی) دارد. c را نقطه‌ی ماکزیمم نسبی و $f(c)$ را مقدار ماکزیمم نسبی تابع می نامند.

توجه : هر نقطه‌ی مینیمم نسبی یا ماکزیمم نسبی، نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع نامیده می شود.

۱	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. اگر تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی $[a,b]$ صعودی باشد، علامت مشتق تابع f در این بازه .... است.	دی ۹۷	۰/۲۵ نمره
۲	مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=\sqrt{x^2-2x+4}$ را در بازه‌ی $[0,2]$ تعیین کنید.	خرداد ۹۸	۱/۵ نمره
۳	تابع $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ در چه بازه ای صعودی و در چه بازه ای نزولی است؟ راه حل خود را بنویسید.	خرداد ۹۸	۱/۲۵ نمره
۴	جای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پرکنید. اگر تابع $y=f(x)$ در بازه‌ی (a,b) صعودی باشد، علامت مشتق تابع f در این بازه .... است.	تیر ۹۸	۰/۲۵ نمره
۵	درست یا نادرست بودن جملات زیر را با توجه به نمودار تابع f که در ذیل آورده شده، مشخص کنید. الف) نقطه ای به طول b مینیمم نسبی تابع f نیست. ب) نقطه ای به طول c یک نقطه‌ی بحرانی برای تابع f است. 	تیر ۹۸	۰/۵ نمره

۶	مقادیر اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x$ را در بازه‌ی $[۰,۲]$ بیابید.	تیر ۹۸	۱/۷۵ نمره
۷	مقادیر اکسترمم های نسبی و مطلق تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}+x^{۲}$ را در بازه‌ی $[-۲,۳]$ به دست آورید.	شهریور ۹۸	۱/۷۵ نمره
۸	اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=۲x^{۳}+۳x^{۲}-۱۲x$ را در بازه‌ی $[-۱,۲]$ مشخص کنید.	دی ۹۸	۱/۲۵ نمره
۹	درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید. تابعی وجود ندارد که برای آن هم $f'(a)=۰$ و هم $f(a)=۰$	خرداد ۹۹	۰/۲۵ نمره
۱۰	در جای خالی کلمه یا عبارت مناسب بنویسید. بزرگترین بازه ای از R که تابع $h(x)=x^{۳}-۱۲x+۴$ در آن نزولی اکید باشد، بازه‌ی .... است.	خرداد ۹۹ خ	۰/۲۵ نمره
۱۱	تابع $f(x)=\lvert x^{۲}-۱\rvert$ در بازه‌ی $[-۲,۳]$ در نمودار زیر رسم شده است. الف : نقاط اکسترمم های نسبی تابع را در صورت وجود بیابید. ب : نقاط اکسترمم مطلق تابع را در صورت وجود بیابید. پ : آیا تابع f در بازه‌ی $[۰,۳]$ مشتق پذیر است؟ چرا؟ 	خرداد ۹۹ خ	۲ نمره
۱۲	نقاط بحرانی تابع $f(x)=\frac{x}{x^{۲}+۱}$ را مشخص کنید.	خرداد ۹۹ خ	۱ نمره
۱۳	مقادیر ماکزیمم و مینیمم مطلق تابع $f(x)=x^{۲}+\lvert x+۱\rvert$ را در بازه‌ی $[-۲,۲]$ بیابید.	خرداد ۹۹ خ	۱/۷۵ نمره

۱۴	اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=2x^3+3x^2-12x$ را در بازه‌ی $[-1,3]$ مشخص کنید.	شهریور۹۹	۲ نمره
۱۵	مقادیر ماکزیمم و می نیمم تابع $f(x)=x^3-3x+1$ را در بازه‌ی $[-1,2]$ تعیین کنید.	دی ۹۹	۱/۵ نمره
۱۶	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید. الف : اگر تابع f در هر نقطه اکسترمم نسبی مشتق پذیر باشد، آنگاه مشتق تابع f در این نقاط صفر می شود. ب : اگر علامت f' بر بازه ای منفی باشد، آنگاه تابع f بر آن بازه اکیداً نزولی است.	خرداد ۱۴۰۰	۰/۵ نمره
۱۷	اکسترمم های مطلق تابع $f(x)=x^3-3x^2+1$ را در بازه‌ی $[-1,1]$ تعیین کنید.	خرداد ۱۴۰۰	۱/۵ نمره
۱۸	مقادیر a و b و c را در تابع $f(x)=ax^3+bx^2+c$ طوری به دست آورید که در شرایط زیر صدق کند. $f(0)=1$ و $f(1)=2$ و $x=\frac{1}{2}$ طول نقطه‌ی عطف نمودار تابع f باشد.	دی ۱۴۰۰	۱/۵ نمره
۱۹	مقادیر اکسترمم مطلق تابع $g(x)=x^4+2x-5$ را در بازه‌ی $[-2,1]$ در صورت وجود تعیین کنید.	دی ۱۴۰۰	۱ نمره

بهینه سازی

برای حل مسائل بهینه سازی، ابتدا با توجه به صورت مسئله تابعی یک متغیره تشکیل می دهیم و ریشه های مشتق مرتبه‌ی اول آن را تعیین می کنیم و اگر لازم باشد، جدول تغییرات رسم کنید. توجه داشته باشید که فقط ریشه هایی را می پذیریم که شرایط مسئله‌ی را داشته باشند و در دامنه‌ی اعتباری[1] مسئله باشند.

[1]. دامنه‌ی اعتباری تابع، مجموعه‌ی مقادیری است که متغیر در آنها با توجه به محدودیت های موجود، با معنی باشد. برای مثال وقتی گفته می شود که مساحت مربعی به ضلع x برابر $f(x)=x^2$ می باشد، دامنه‌ی اعتباری این تابع این است که x فقط یک عدد مثبت است.

۱	ورق فلزی مستطیل شکلی، به طول ۱۶ سانتی متر و عرض ۶ سانتی متر را در نظر بگیرید. می خواهیم از چهار گوشه‌ی آن مربع های کوچکی به ضلع x برش بزنیم و آنها را کنار بگذاریم. سپس لبه‌ی جعبه را به اندازه‌ی x بر می گردانیم تا یک جعبه‌ی سرباز ساخته شود. مقدار x چقدر باشد تا حجم جعبه، حداکثر مقدار ممکن گردد.	شهریور ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره

آزمون مشتق اوّل

آزمون مشتق اوّل (چگونگی تعیین نقاط اکسترمم نسبی تابع)

فرض کنید c نقطه‌ی بحرانی تابع f باشد. ($a<c<b$) و تابع f بر بازه‌ی $I=(a,b)$ پیوسته و بر این بازه بجز احتمالاً در c ، مشتق پذیر باشد. در این صورت:

الف : اگر f' روی (a,c) مثبت و روی (c,b) منفی باشد، آنگاه f در c ماکزیمم نسبی دارد.

ب : اگر f' روی (a,c) منفی و روی (c,b) مثبت باشد، آنگاه f در c مینیمم نسبی دارد.

ج : اگر f' روی (a,c) و (c,b) تغییر علامت ندهد، آنگاه f در c اکسترمم نسبی ندارد.

توجه کنید که f می تواند در $x=c$ مشتق پذیر ($f'(c)=0$) یا مشتق ناپذیر ($f'(c)$ وجود ندارد.) باشد. اما حتماً باید در این نقطه پیوستگی دو طرفه داشته باشد. در واقع با آزمون مشتق اول ، اکسترمم های نسبی پیوسته‌ی توابع را می توان تعیین نمود.

قضیه‌ی فرما : اگر تابع f در نقطه‌ی c دارای اکسترمم نسبی و $f'(c)$ وجود داشته باشد. آنگاه $f'(c)=0$ است.

نتیجه : هر نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع ، یک نقطه‌ی بحرانی است.

۱	ضرایب a و b را در تابع $f(x)=-x^3+ax+b$ طوری تعیین کنید که در نقطه‌ی $(1,2)$ماکزیمم نسبی داشته باشد.	دی ۹۷	۱/۵ نمره
۲	ضرایب a و b را در تابع $f(x)=x^3+ax+b$ طوری تعیین کنید که در نقطه‌ی $(1,2)$ماکزیمم نسبی داشته باشد.	تیر ۹۸	۱ نمره
۳	اگر نقطه‌ی $(2,1)$ نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع $f(x)=x^3+bx^2+d$ باشد، مقادیر b و d را به دست آورید.	خرداد ۹۹ خ	۱/۲۵ نمره

۴	درستی یا نادرستی عبارت را تعیین کنید. اگر $x=c$ طول نقطه‌ی اکسترمم نسبی تابع $f(x)$ و $f'(c)$ موجود باشد. آنگاه $f'(c)=0$	دی ۹۹	۰/۵ نمره

جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه‌ی عطف

جهت تقعر منحنی

فرض کنیم $f''(x)$ به ازای هر x از بازه‌ی باز I موجود باشد. در این صورت:

الف: اگر به ازای هر $x\in I$ ، $f''(x)>0$ باشد، آنگاه نمودار f روی بازه‌ی I تقعر رو به بالا دارد.

ب : اگر به ازای هر $x\in I$ ، $f''(x)<0$ باشد، آنگاه نمودار f روی بازه‌ی I تقعر رو به پایین دارد.

نقطه‌ی عطف نمودار تابع

نقطه‌ی $(c,f(c))$، نقطه‌ی عطف نمودار تابع f نامیده می شود (یا تابع f در c نقطه‌ی عطف دارد.) هرگاه دو شرط زیر هم زمان باشند.

الف : نمودار f در c دارای مماس واحد باشد. (یعنی $f'(c)=L$ یا $f'(c)=+\infty$ یا $f'(c)=-\infty$)

ب : جهت تقعر f در c عوض شود. (یعنی f'' تغییر علامت دهد.)

آزمون مشتق دوّم (چگونگی تعیین نقاط اکسترمم نسبی تابع)

گاهی می توان از مشتق دوّم برای تعیین اکسترمم های نسبی (موضعی) نیز استفاده کرد.

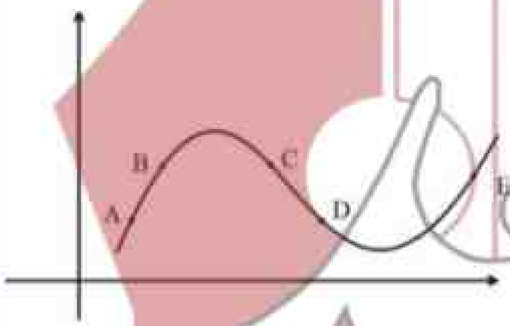
فرض کنید $(c,f(c))$ نقطه‌ی بحرانی تابع f باشد و $f'(c)=0$ و $f''(c)$ موجود باشد. در این صورت:

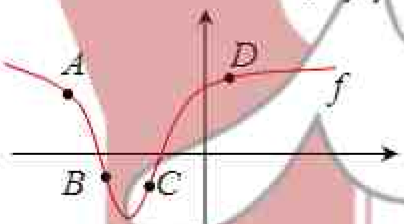
الف : اگر $f''(c)>0$ باشد، آنگاه f در c مینیمم نسبی دارد.

ب : اگر $f''(c)<0$ باشد، آنگاه f در c ماکزیمم نسبی دارد.

ج : اگر $f''(c)=0$ باشد، آنگاه آزمون بی نتیجه است (یعنی با این آزمون نمی توان حکم قطعی داد.)

۱	جهت تقعر و نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x)=-x^3+3x^2+1$ را به دست آورید.	دی ۹۷	۱ نمره

۲	مقادیر a و b را در تابع $f(x)=ax^{3}+bx^{2}-1$ چنان بیابید که $A(1,1)$ نقطه‌ی عطف منحنی باشد.	خرداد ۹۸	۱/۲۵ نمره
۳	جهت تقعر و نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x)=x^{3}+3x+1$ را به دست آورید.	تیر ۹۸	۱ نمره
۴	ابتدا جهت تقعر تابع $y=\frac{x+1}{x-1}$ را مشخص کرده، سپس وجود نقطه‌ی عطف آن را بررسی کنید.	شهریور ۹۸	۰/۷۵ نمره
۵	شکل زیر را در نظر بگیرید. تعیین کنید که در کدام یک از پنج نقطه‌ی مشخص شده در نمودار الف : $f'(x)$ و $f''(x)$ هر دو منفی اند. ب : $f'(x)$ منفی و $f''(x)$ مثبت است.  	دی ۹۸	۱ نمره
۶	جهت تقعر و نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x)=x^{3}+3x^{2}+1$ را مشخص کنید.	خرداد ۹۹	۲ نمره
۷	مقادیر b و a را در تابع $f(x)=ax^{3}+bx^{2}+1$ به ترتیب کدام یک از موارد زیر است. اگر $f(1)=2$ و $x=\frac{1}{2}$ طول نقطه‌ی عطف آن باشد. الف : $a=1$ و $b=-2$ ب : $a=4$ و $b=-4$ ج : $a=4$ و $b=4$ د : $a=-2$ و $b=3$	خرداد ۹۹ خ	۰/۵ نمره
۸	جهت تقعر و نقطه‌ی عطف نمودار تابع $f(x)=-x^{3}+3x^{2}+1$ را به دست آورید.	خرداد ۹۹ خ	۱/۲۵ نمره
۹	درستی یا نادرستی عبارت را تعیین کنید. در هر نقطه ای که جهت تقعر منحنی تابع عوض شود آن نقطه‌ی عطف تابع است.	دی ۹۹	۰/۵ نمره

۱۰	درستی یا نادرستی عبارت های زیر را تعیین کنید. الف : تابع صعودی اکید، نقطه‌ی عطف ندارد. ب : در نقطه‌ی عطف علامت $f''(x)$ تغییر می کند.	خرداد ۱۴۰۰	۰/۵ نمره
۱۱	اگر نقطه‌ی $A(-۱,۱)$، نقطه‌ی عطف منحنی $f(x)=x^۳+ax^۲+bx-۱$ باشد. مقادیر a و b را به دست آورید.	خرداد ۱۴۰۰	۱ نمره
۱۲	جهت تقعر تابع $f(x)=\sqrt[۳]{x-۱}$ را در دامنه اش بررسی کرده و نقطه‌ی عطف آن را در صورت وجود به دست آورید.	شهریور ۱۴۰۰	۱/۲۵ نمره
۱۳	درستی یا نادرستی عبارت زیر را تعیین کنید. هر نقطه ای که در آن مقدار $f''(x)$ برابر صفر شود، یک نقطه‌ی عطف تابع $f(x)$ است.	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره
۱۴	جای خالی را با عدد یا کلمه‌ی مناسب کامل کنید. در نقطه‌ی .... از نمودار مقابل، مقادیر f' و f'' هر دو مثبت است. 	شهریور ۱۴۰۰	۰/۲۵ نمره

رسم نمودار توابع

مراحل رسم نمودار توابع به کمک مشتق

برای رسم نمودار یک تابع ، با استفاده از مشتق، به ترتیب زیر عمل کنید.

۱ : دامنه‌ی تابع را تعیین می کنید.

۲ : از تابع مشتق گرفته و ریشه های آن را در صورت وجود به دست می آورید.

۳ : جدول تغییرات را رسم می کنید.

۴ : به کمک جدول تغییرات، نمودار تابع را روی صفحه‌ی محور های مختصات رسم کنید.

اگر لازم باشد، جهت دقت بیشتر در نقطه یابی و ترسیم نمودار، می توانید از نقاط دلخواه دیگری[2] با توجه به معادله‌ی تابع انتخاب کنید. این نقاط را نقاط کمکی می نامند.

توجه : در صورتی که تابع دارای مجانب افقی یا قائم باشد، ابتدا مجانب های آن را تعیین و قبل از ترسیم نمودار تابع، نمودار مجانب ها را رسم کنید.

رسم نمودار تابع هموگرافیک(همنگار)

هر تابع به صورت $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ به شرط $\dfrac{a}{c}\neq\dfrac{b}{d}$ و $c\neq ۰$ را تابع هموگرافیک می نامند. این تابع به ازای همه‌ی مقادیر x بجز ریشه‌ی مخرج یعنی $x=\dfrac{-d}{c}$ پیوسته است.

تابع هموگرافیک دارای دو مجانب بصورت زیر می باشد.

$$cx+d=۰\rightarrow x=\frac{-d}{c}$$ مجانب قائم

$$y=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax+b}{cx+d}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{ax}{cx}=\frac{a}{c}$$ مجانب افقی

اگر از تابع هموگرافیک مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$y'=\frac{ad-bc}{(cx+d)^{۲}}=\frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^{۲}}$$

و چون $\dfrac{a}{c}\neq\dfrac{b}{d}$ پس $ad\neq bc$ لذا همواره $y'\neq ۰$ می باشد و لذا تابع نقطه‌ی هیچگاه ماگزیمم یا مینیمم ندارد. همچنین اگر $ad-bc>۰$ باشد، تابع در هر سمت مجانب قائم آن صعودی اکید و اگر $ad-bc<۰$ باشد تابع در هر سمت مجانب قائم آن نزولی اکید است. ولی طبق تعریف، تابع هموگرافیک در دامنه اش نه صعودی و نه نزولی می باشد.

اگر مشتق مثبت باشد، نمودار تابع در ناحیه‌ی دوم و چهارم مجانب هایش قرار می گیرد.

و اگر مشتق منفی باشد، نمودار تابع در ناحیه‌ی اول وسوم مجانب هایش قرار می گیرد.

تابع هموگرافیک دارای یک مرکز تقارن و دو محور تقارن است.

مرکز تقارن، تابع هموگرافیک محل تلاقی مجانب های آن است. لذا مختصات مرکز تقارن همواره به صورت زیر می باشد.

$$\omega\left(\frac{-d}{c},\frac{a}{c}\right)$$

محورهای تقارن تابع هموگرافیک یکی از مجموع دو مجانب و دیگری از تفاضل دو مجانب تابع بدست می آیند.

---

[2]. نقاط برخورد نمودار تابع با محورهای مختصات در صورت وجود را نیز تعیین کنید.

$$x+y=\frac{-d}{c}+\frac{a}{c}=\frac{a-d}{c}$$

$$x-y=\frac{-d}{c}-\frac{a}{c}=-\frac{a+d}{c}$$

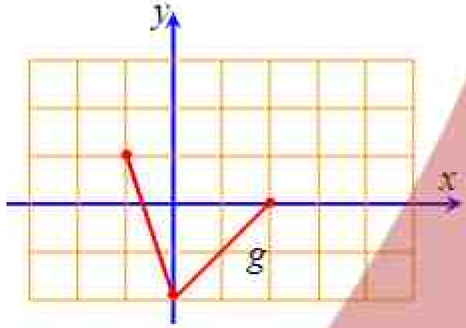
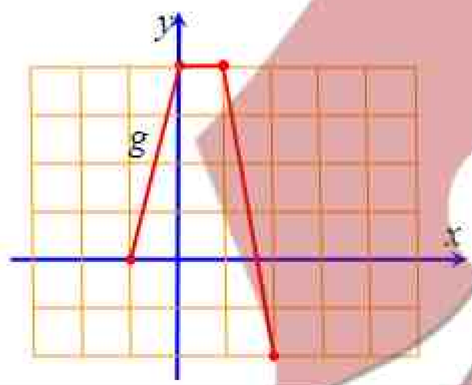
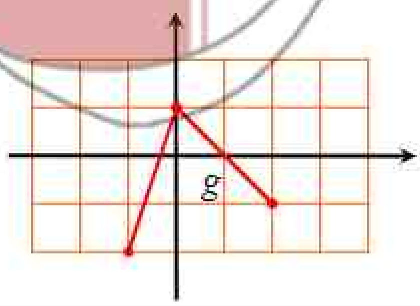
۱	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x-۲}$ را رسم کنید.	دی ۹۷	۱/۷۵ نمره
۲	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۱}{x-۱}$ را رسم کنید.	خرداد ۹۸	۱/۷۵ نمره
۳	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{x-۱}{x+۲}$ را رسم کنید.	تیر ۹۸	۱/۵ نمره
۴	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=x^{۳}+۳x^{۲}+۱$ را رسم کنید.	شهریور ۹۸	۱/۲۵ نمره
۵	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\frac{۲x}{x-۱}$ را رسم کنید.	دی ۹۸	۱/۷۵ نمره
۶	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=\frac{x-۱}{x+۱}$ را رسم کنید.	خرداد ۹۹	۲ نمره
۷	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ را رسم کنید.	خرداد ۹۹ خ	۱/۷۵ نمره
۸	جدول رفتار و نمودار تابع $y=x^{۳}+۳x^{۲}+۱$ را رسم کنید.	خرداد ۹۹ خ	۱/۷۵ نمره
۹	جدول تغییرات و نمودار تابع $f(x)=x^{۳}-۳x+۱$ را رسم کنید.	شهریور۹۹	۲ نمره
۱۰	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\frac{x}{x-۲}$ را رسم کنید.	دی ۹۹	۲ نمره

۱۱	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+1}$ را رسم کنید.	خرداد ۱۴۰۰	۲/۵ نمره
۱۲	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=-x^{3}+6x^{2}-9$ را رسم کنید.	شهریور ۱۴۰۰	۱/۵ نمره
۱۳	جدول رفتار و نمودار تابع $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$ را رسم کنید.	دی ۱۴۰۰	۲ نمره

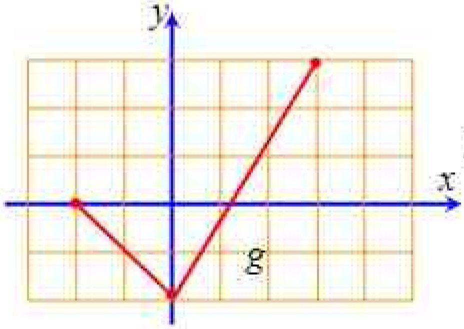
پاسخ سوالات موضوعی نهایی

فصل اوّل حسابان۲ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

تبدیل نمودار توابع

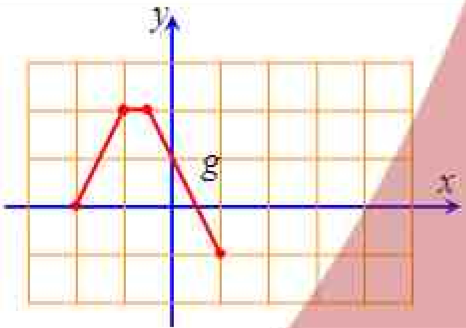
۱	$D_g=[-۱,۲]$ و $R_g=[-۲,۱]$ 
۲	$D_g=[-۱,۲]$, $R_g=[-۲,۴]$ 
۳	نادرست
۴	برای رسم نمودار تابع g، ابتدا انقباض افقی برای $k=۲$ در راستای محور طول ها سپس انتقال یک واحد رو به پایین در راستای محور عرض ها $D_g=[-۱,۲]$ 
۵	الف : $g(x)=x^۳$ ب : محور طول ها

۶



$D_g = [-۲,۳]$

۷



دامنه $D = [-۲,۱]$

برد $R = [-۱,۲]$

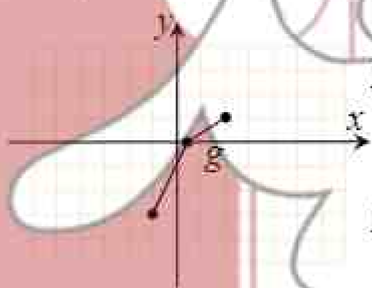
۸

ابتدا مختصات نقاط مهم تابع f را نوشته، سپس طول هر نقطه را نصف و عرض هر نقطه را یک واحد کم می کنیم.

$f:$			
x	-۲	۱	۴
y	-۲	۱	۲

$\rightarrow$

$g:$			
x	-۱	۰/۵	۲
y	-۲	۰	۱



$Dg = [-۱,۲]$

$Rg = [-۳,۱]$

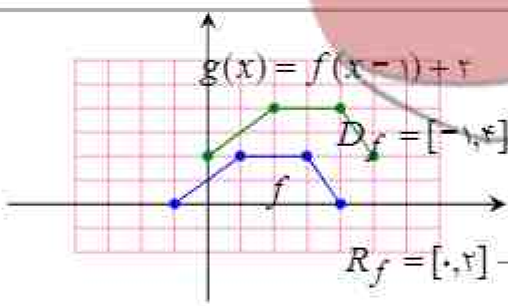
۹

$(۵,۰)$

۱۰

طبق قوانین تبدیلات ، کافی است نمودار تابع f را یک واحد به جلو و سپس دو واحد به سمت بالا منتقل کنید.

$g(x) = f(x-۱)+۲$



$D_f = [-۱,۴] \rightarrow D_g = [۰,۵]$

$R_f = [۰,۲] \rightarrow R_g = [۲,۴]$

۱۱

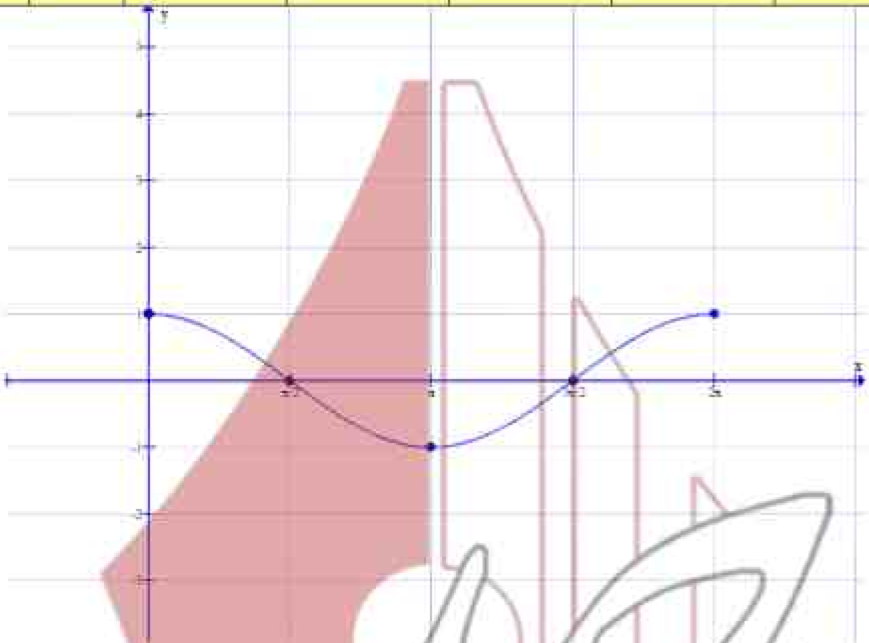
درست

۱۲

$[-۱,۰]$

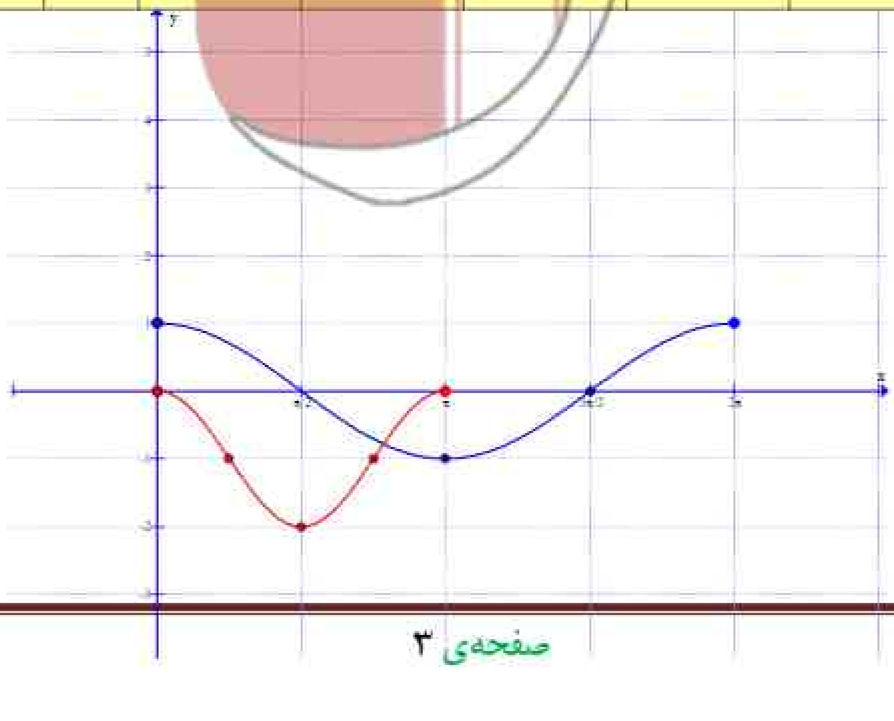
۱۳ برای رسم نمودار تابع $f(x)=\cos x$ ابتدا نقاط مهم فاصله‌ی داده شده را در نظر می گیریم.

f	x	۰	$\frac{\pi}{۲}$	π	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
	y	۱	۰	-۱	۰	۱



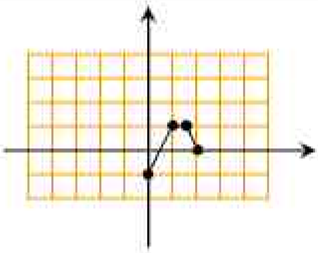
حال برای رسم نمودار تابع $g(x)=\cos ۲x-۱$ کافی است که طول نقاط تابع $f(x)=\cos x$ را نصف و عرض نقاط را یک واحد کم کنیم.

g	x	۰	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۴}$	π
	y	۰	-۱	-۲	-۱	۱



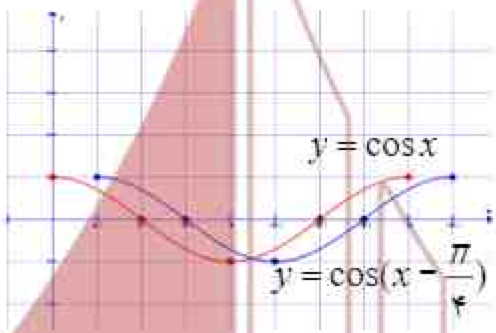
۱۴

$D_g=[۰,۲]$، $R_g=[-۱,۱]$



۱۵

نقاط نمودار تابع $y=\cos x$ در بازه‌ی داده شده را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۴}$ به سمت راست منتقل می کنیم.



۱۶

انقباض افقی

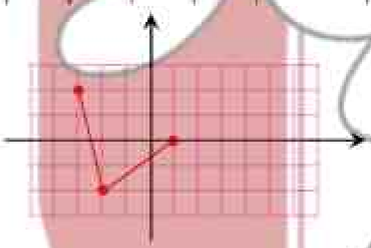
۱۷

طول نقاط را یک واحد کم می کنیم و عرض نقاط را دو برابر می کنیم.

x	-۲	-۱	۲
y	۱	-۱	۰

$\Rightarrow$

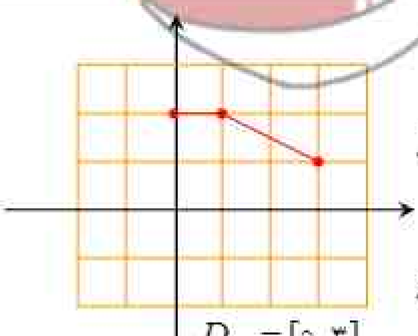
x	-۳	-۲	۱
y	۲	-۲	۰



$D_f=[-۳,۱]$

$R_f=[-۲,۲]$

۱۸



$f:$

x	-۱	۰	۲
y	۱	۱	۰

$g:$

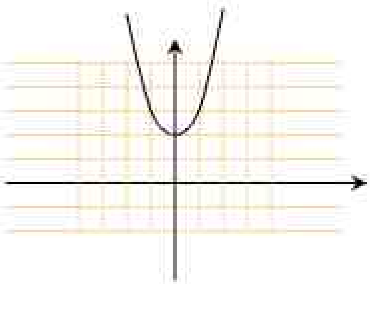
x	۰	۱	۳
y	۲	۲	۱

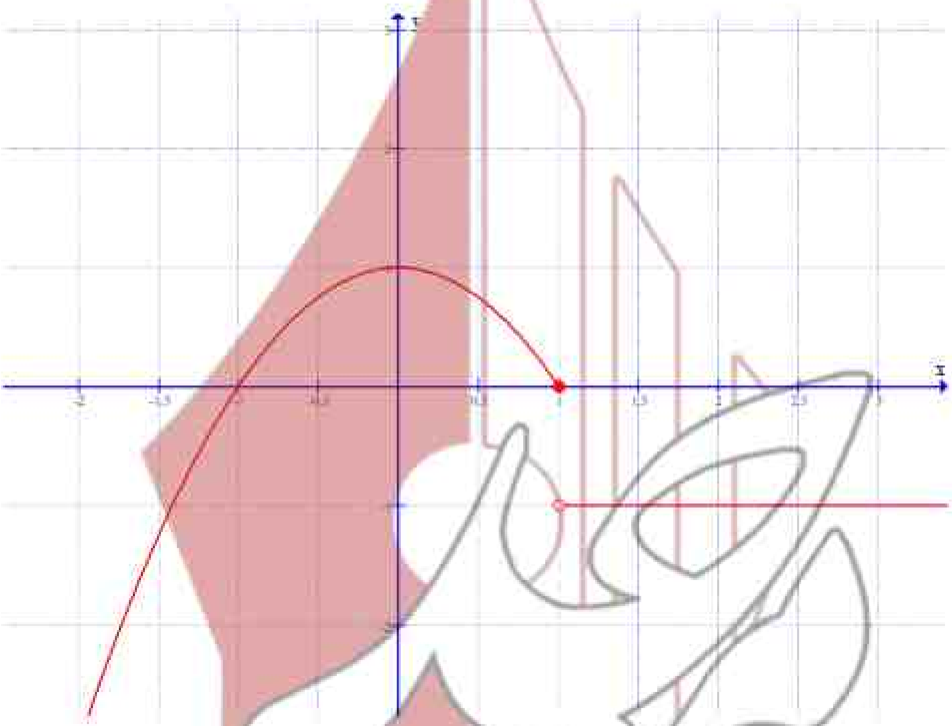
$D_g=[۰,۳]$

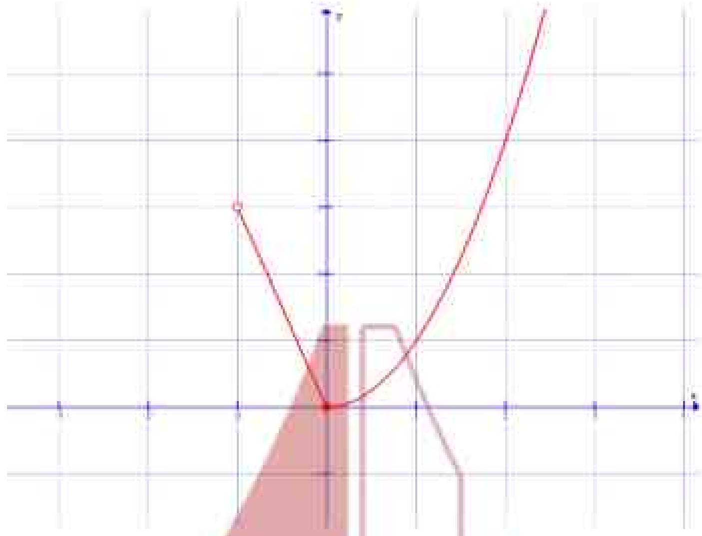
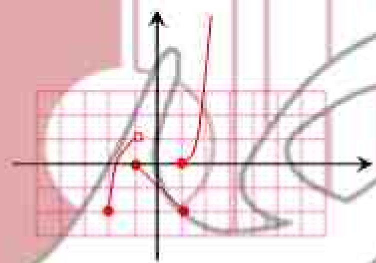
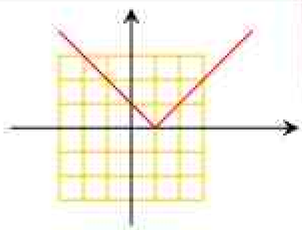
تابع درجه سوم و چند جمله ای

۱	۷
۲	نادرست
۳	درست

توابع یکنوا

۱	اکیداً صعودی 
۲	$(2,+\infty)$
۳	$x+1 \le 2x-3 \to x \ge 4$
۴	نادرست
۵	$[\frac{8}{3}, +\infty)$
۶	نادرست
۷	نمودار این تابع با دو واحد انتقال نمودار تابع $f(x)=x^2$ به سمت بالا بدست می آید که یک سهمی می باشد. رأس سهمی نقطه‌ی (۰,۲) است. لذا بزرگترین بازه ای که تابع در آن صعودی اکید است بازه‌ی $(-\infty, 0)$ و بزرگترین بازه ای که تابع درآن نزولی اکید است بازه‌ی $(0, +\infty)$ است. توجه این بازه ها را از طرف صفر هم می توان بسته نوشت. 

۸	درست
۹	نادرست
۱۰	صفر
۱۱	درست
۱۲	نمودار تابع در فاصله های (۱,+∞) و (−∞,۰) صعودی و در فاصله های [۰,۱] و [(۱,+∞)] نزولی است. 
۱۳	درست
۱۴	یکنوا

 نمودار تابع داده شده ، در بازه‌ی $[-1,0)$ اکیداً نزولی و در بازه‌ی $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است.	۱۵
درست	۱۶
 نمودار تابع در فاصله‌ی $[-2,-1)$ صعودی ، در فاصله‌ی $[1,+\infty)$ صعودی و در فاصله‌ی $[-1,1)$ نزولی است.	۱۷
$(3^{-1})^{10-2x} \le (3^{-4}) \rightarrow 2x-10 \le -4 \rightarrow 2x \le 6 \rightarrow x \le 3$	۱۸
در فاصله‌ی $[1,+\infty)$ اکیداً صعودی ، در فاصله‌ی $(-\infty,1]$ اکیداً نزولی 	۱۹

تقسیم چند جمله ای ها و بخش پذیری

۱	-۲
۲	$f(-۱)=۰ \to ۱-a-۳=۰ \to a=-۲$ $f(۲)=۴-۴-۳=-۳$
۳	-۱
۴	$P(۲)=۰ \to ۴a+۲b=-۶ \quad , \quad P(-۱)=۰ \to a-b=۶$ $\begin{cases} ۲a+b=-۳ \\ a-b=۶ \end{cases} \to a=۱ \ , \ b=-۵$
۵	$P(x)=x^۳+ax^۲+bx+۱$ $x-۲=۰ \to x=۲$ $\Rightarrow f(۲)=۰ \to ۸+۴a+۲b+۱=۰ \to ۴a+۲b=-۹$ $x+۱=۰ \to x=-۱$ $\Rightarrow f(-۱)=-۱+a-b+۱=۰ \to a-b=۰$ $\Rightarrow a=b=-\frac{۳}{۲}$
۶	$x-۱=۰ \to x=۱ \Rightarrow p(۱)=۱+a+b$ $\xrightarrow{p(۱)=۴} ۱+a+b=۴ \to a+b=۳$ $x+۲=۰ \to x=-۲ \Rightarrow p(-۲)=-۸+۴a+b$ $\xrightarrow{p(-۲)=۰} -۸+۴a+b=۰ \to ۴a+b=۸$ $\begin{cases} a+b=۳ \\ ۴a+b=۸ \end{cases} \to a=\frac{۵}{۳} \ , \ b=\frac{۴}{۳}$

۷

$$p(x)=x^3+ax^2+bx+1$$

$$x-2=0\to x=2$$

$$\Rightarrow p(x)\big|_{x=2}=(2)^3+a(2)^2+b(2)+1=8+4a+2b+1=9+4a+2b$$

$$\to 9+4a+2b=0\to 4a+2b=-9$$

$$x+1=0\to x=-1$$

$$\Rightarrow p(x)\big|_{x=-1}=(-1)^3+a(-1)^2+b(-1)+1=-1+a-b+1=a-b$$

$$\to a-b=0$$

$$\begin{cases}4a+2b=-9\\ a-b=0\end{cases}\to a=\frac{-3}{2}\ ,\quad b=\frac{-3}{2}$$

۸

نادرست

۹

$$x-1=0\to x=1$$

$$y\big|_{x=1}=4\to(1)^3+a(1)^2+(1)+b=4\to a+b=2$$

$$x+2=0\to x=-2$$

$$y\big|_{x=-2}=0\to(-2)^3+a(-2)^2+(-2)+b=0\to -8+4a-2+b=0\to 4a+b=10$$

$$\begin{cases}a+b=2\\ 4a+b=10\end{cases}\to a=\frac{8}{3}\ ,\quad b=\frac{-2}{3}$$

۱۰

$$x-2=0\to x=2\xrightarrow{P(x)=x^3+ax^2+bx-2}P(2)=8+4a+2b-2=0$$

$$\to 4a+2b=-6\to 2a+b=-3$$

$$x+1=0\to x=-1\xrightarrow{P(x)=x^3+ax^2+bx-2}P(-1)=-1+a-b-2=3\to a-b=6$$

$$\to\begin{cases}2a+b=-3\\ a-b=6\end{cases}\to a=1\ ,\quad b=-5$$

۱۱	$x+2=0 \to x=-2$ $\begin{cases} p(-2)=(-2)^3+a(-2)+1=-2a-7 \\ q(-2)=2(-2)^2-(-2)+1=11 \end{cases} \to -2a-7=11 \to a=-9$
۱۲	$x+2=0 \to x=-2$ $\to P(-2)=-8+4a-2b+2=0 \to 4a-2b=6 \xrightarrow{\div 2} 2a-b=3$ $x-1 \to x=1$ $\to P(1)=1-a+b+2=0 \to -a+b=-3$ $\begin{cases} 2a-b=3 \\ -a+b=-3 \end{cases} \to a=0\ ,\ b=-3$

اتحاد های تکمیلی

۱	$x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$ $x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$
۲	$x^6-1=(x+1)(x^5-x^4+x^3-x^2+x-1)$
۳	$x^5+1=(x+1)(x^4-x^3+x^2-x+1)$
۴	$x^6-1=(x-1)(x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$
۵	$x^5+2^5=(x+2)(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

فصل دوّم حسابان۲ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

دوره‌ی تناوب

۱	نادرست
۲	$\frac{۲\pi}{\lvert b \rvert} = \pi \rightarrow \lvert b \rvert = ۲$ $\begin{cases} \lvert a \rvert + c = ۳ \\ -\lvert a \rvert + c = ۳ \end{cases} \rightarrow \lvert a \rvert = ۳ \,,\, c = ۰$ هر یک از توابع $y = ۳\sin(۲x)$ یا $y = -۳\sin(۲x)$ می توانند جواب باشند.
۳	$T = \frac{۲\pi}{\lvert -\frac{\pi}{۴} \rvert} = \frac{۸\pi}{\pi} = ۸$
۴	۲
۵	$\max(f) = ۳$ و $\min(f) = -۱$
۶	$T = \frac{۲\pi}{\pi} = ۲$ $\max(f) = \lvert -۳ \rvert + ۱ = ۴$ $\min(f) = -\lvert -۳ \rvert + ۱ = -۲$
۷	$\frac{۲\pi}{\lvert b \rvert} = \pi \rightarrow \lvert b \rvert = ۲ \rightarrow b = \pm ۲$ $\begin{cases} \lvert a \rvert + c = ۳ \\ -\lvert a \rvert + c = ۳ \end{cases} \rightarrow \lvert a \rvert = ۴ \,,\, c = ۲$ هر یک از توابع $y = ۴\sin(۲x) + ۲$ یا $y = -۴\sin(۲x) + ۲$ یا $y = ۴\sin(-۲x) + ۲$ یا $y = -۴\sin(-۲x) + ۲$ می توانند باشند.

۸	۶π
۹	$\max(y)=\lvert a\rvert+c=۲+۱=۳$ $\min(y)=-\lvert a\rvert+c=-۲+۱=-۱$
۱۰	نمودار تابع از مبدأ مختصات می گذرد، لذا بهتر است تابع به صورت سینوسی باشد. $y=a\sin(bx)$ دوره‌ی تناوب نمودار تابع برابر π است. لذا : $T=\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}=\pi\to b=\pm۲$ $\to y=a\sin(\pm۲x)\to y=\pm a\sin(۲x)$ نمودار تابع از نقطه‌ی $(\frac{\pi}{۴},۲)$ می گذرد، پس : $\xrightarrow{y=\pm a\sin(۲x)} ۲=\pm a\sin(۲(\frac{\pi}{۴}))\to ۲=\pm a\sin(\frac{\pi}{۲})\xrightarrow{\sin(\frac{\pi}{۲})=۱} a=\pm۲$ که با توجه به نمودار مقدار $a=-۲$ ، قابل قبول نیست. لذا معادله‌ی تابع در نهایت به شکل زیر خواهد شد. $\to y=۲\sin(۲x)$
۱۱	$T=\frac{۲\pi}{\lvert b\rvert}=\frac{۲\pi}{\lvert\frac{\pi}{۲}\rvert}=۴$ و $\min(y)=-\lvert a\rvert+c=-۲+(-۱)=-۳$
۱۲	$T=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi$ $\max(y)=\lvert-\pi\rvert+\sqrt{۵}=\pi+\sqrt{۵}$ $\min(y)=-\lvert-\pi\rvert+\sqrt{۵}=-\pi+\sqrt{۵}$
۱۳	با توجه به نمودار، ضابطه‌ی تابه به صورت $y=a\sin bx+c$ و $a=-\frac{۱}{۲}$ و $b=۳$ می شود. از طرفی $\max(f)=\frac{۱}{۲}$ و $\min(f)=-\frac{۱}{۲}$ می شود. لذا معادله‌ی تابع به شکل $y=-\frac{۱}{۲}\sin۳x$ خواهد شد.

۱۴	دوره‌ی تناوب $\|b\|=\frac{۲\pi}{۳}\rightarrow b=\frac{۲\pi}{۳}$ $\begin{cases}\max(f)=\|a\|+c=۵\\ \min(f)=-\|a\|+c=۳\end{cases}\rightarrow c=۴\ ,\quad \|a\|=۱\rightarrow a=\pm ۱$ $\rightarrow y=\sin\frac{۲\pi}{۳}x+۴\ \ or\ \ y=-\sin\frac{۲\pi}{۳}x+۴$
۱۵	$\max(f)=\|a\|+c=\|-۲\pi\|+۹=۲\pi+۹$ $\min(f)=-\|a\|+c=-\|-۲\pi\|+۹=-۲\pi+۹$ $T=\frac{۲\pi}{\|b\|}=\frac{۲\pi}{\|\frac{۱}{۳}\|}=۶\pi$
۱۶	$T=\frac{۲\pi}{\|b\|}\xrightarrow{T=۲}\|b\|=\pi$ $\begin{cases}\|a\|+c=۴\\ -\|a\|+c=-۲\end{cases}\rightarrow \|a\|=۳\ ,\ c=۱$ لذا هر یک از توابع $y=-۳\cos(\pi x)+۱$ یا $y=۳\cos(\pi x)+۱$ می توانند جواب این مساله باشند.

تابع تانژانت

۱	π
۲	نادرست
۳	درست
۴	الف : درست ب : نادرست
۵	$T=\frac{\pi}{\|b\|}=\frac{\pi}{\|۱\|}=\pi$
۶	درست
۷	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{۲}\ ;\ k\in Z$

۸	R
۹	درست
۱۰	π

معادلات مثلثاتی

۱	$\cos ۳x=\cos x \rightarrow \begin{cases} ۳x=۲k\pi+x \rightarrow x=k\pi \\ ۳x=۲k\pi-x \rightarrow x=\frac{k\pi}{۲} \end{cases}$
۲	$۲\cos^۲ x-۱+\cos x+۱=۰ \rightarrow ۲\cos^۲ x+\cos x=۰ \rightarrow \cos x(۲\cos x+۱)=۰$ $\cos x=۰ \rightarrow x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$ $۲\cos x+۱=۰ \rightarrow \cos x=-\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\alpha=\pi-\frac{\pi}{۳}=\frac{۲\pi}{۳}} x=۲k\pi\pm\frac{۲\pi}{۳}$
۳	$\sin ۲x-\cos x=۰ \rightarrow ۲\sin x\cos x-\cos x=۰ \rightarrow \cos x(۲\sin x-۱)=۰$ $\rightarrow \begin{cases} \cos x=۰ \rightarrow x=k\pi+\frac{\pi}{۲} \\ ۲\sin x-۱=۰ \rightarrow \sin x=\frac{۱}{۲} \xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{۶}} \begin{cases} x=۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \\ x=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۶}=۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶} \end{cases} \end{cases}$
۴	$\sin ۳x=\sin ۲x \rightarrow \begin{cases} ۳x=۲k\pi+۲x \rightarrow x=۲k\pi \qquad k\in Z \\ ۳x=(۲k+۱)\pi-۲x \rightarrow x=\frac{(۲k+۱)}{۵}\pi \end{cases}$
۵	$\cos ۳x=\frac{\sqrt{۳}}{۲} \xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{۶}} ۳x=۲k\pi\pm\frac{\pi}{۶} \rightarrow x=\frac{۲k\pi}{۳}\pm\frac{\pi}{۱۲}$

۶

$$\sin 3x=\frac{\sqrt{2}}{2}\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{4}}\begin{cases}3x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\\ 3x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\rightarrow x=\frac{2k\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\end{cases}\quad (k\in Z)$$

۷

فرض کنیم که چنین مثلثی وجود داشته باشد. لذا

$$S=8\sqrt{2}\xrightarrow{0\le\theta\le\pi}\frac{1}{2}(4)(8)\sin\theta=8\sqrt{2}\rightarrow\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{4}}\begin{cases}\theta=2k\pi+\frac{\pi}{4}\\ \theta=(2k+1)\pi-\frac{\pi}{4}\end{cases}$$

حال مقدار θ مجاز را تعیین می کنیم.

k	۰	۱	۲
θ	$\frac{\pi}{4}$ و $\frac{3\pi}{4}$	بیش از حد مجاز	بیش از حد مجاز

لذا دو مثلث با این شرایط وجود دارد.

۸

$$2(1-\cos^2 x)+9\cos x+3=0\rightarrow -2\cos^2 x+9\cos x+5=0$$

$$\xrightarrow{\Delta=81+40=121}\begin{cases}\cos x=\frac{-9+11}{-4}\rightarrow\cos x=-\frac{1}{2}\\ \cos x=\frac{-9-11}{-4}\rightarrow\cos x=-5\end{cases}$$ غیر ممکن

$$\cos x=-\frac{1}{2}\xrightarrow{\alpha=\pi-\frac{\pi}{3}=\frac{2\pi}{3}}x=2k\pi\pm\frac{2\pi}{3}\qquad k\in Z$$

۹

$$\cos 3x=\cos x\rightarrow\begin{cases}3x=2k\pi+x\\ 3x=2k\pi-x\end{cases}\rightarrow\begin{cases}2x=2k\pi\\ 4x=2k\pi\end{cases}\rightarrow\rightarrow\begin{cases}x=k\pi\\ x=\frac{k\pi}{2}\end{cases}\quad(k\in Z)$$

$\sin x\cos x=\frac{\sqrt{2}}{4}\to\frac{1}{2}(2\sin x\cos x)=\frac{\sqrt{2}}{4}\to\sin 2x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{4}}\begin{cases}2x=2k\pi+\frac{\pi}{4}\to x=k\pi+\frac{\pi}{8}\\ 2x=2k\pi+\pi-\frac{\pi}{4}\to x=k\pi+\frac{3\pi}{8}\end{cases}$	۱۰
$2\cos^2 x=\sin x-1\xrightarrow{\cos^2 x=1-\sin^2 x}-2\sin^2 x-\sin x+3=0$ $\to\begin{cases}\sin x=1\to x=2k\pi+\frac{\pi}{2}\quad ;\ k\in Z\\ \sin x=-\frac{3}{2}\to 0\end{cases}$	۱۱
$2\sin x\cos x+3\cos x=0\to\cos x(2\sin x+3)=0$ $\to\begin{cases}\cos x=0\to x=k\pi+\frac{\pi}{2}\quad ;\quad k\in Z\\ \sin x=-\frac{3}{2}\qquad 0\end{cases}$ تساوی $\sin x=-\frac{3}{2}$ غیرممکن است.	۱۲
$\cos 2x-\cos x+1=0\to 2\cos^2 x-1-\cos x+1=0$ $\to 2\cos^2 x-\cos x=0\to\cos x(2\cos x-1)=0$ $\to\begin{cases}\cos x=0\to x=k\pi+\frac{\pi}{2}\\ \cos x=\frac{1}{2}\xrightarrow{\alpha=\frac{\pi}{3}}x=2k\pi\pm\frac{\pi}{3}\end{cases}$	۱۳

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

فصل سوّم حسابان۲ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

حدهای نامتناهی و حد در بی نهایت

۱	الف) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{2x+1}{4-x^2} = \dfrac{5}{0^-} = -\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^5+3x^3+1}{-3x^5+3x^2+3} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^5}{-3x^5} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4}{-3} = -\dfrac{4}{3}$
۲	درست
۳	۳
۴	الف) $\lim\limits_{x\to (-1)^-} \dfrac{x^2+x}{x^2+2x+1} = \lim\limits_{x\to (-1)^-} \dfrac{x(x+1)}{(x+1)^2} = \lim\limits_{x\to (-1)^-} \dfrac{x}{x+1} = +\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x^3+2x-1}{-2x^3+4} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x^3}{-2x^3} = -\dfrac{5}{2}$
۵	الف) $+\infty$ ب) ۱
۶	الف) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^2-1}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x-1} = +\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to -\infty} (-2x^3+x-1) = \lim\limits_{x\to -\infty} x^3(-2+\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{x^3}) = \lim\limits_{x\to -\infty} (-2x^3) = +\infty$ پ) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+1}{2x^3-4x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3}{2x^3} = \dfrac{1}{2}$
۷	$-\infty$

۸	الف) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{[x]-۲}{۳-x}=\frac{[۳^+]-۲}{۳-۳^+}=\frac{۳-۲}{۰^-}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{۳x+۱}{x-۵}-\frac{۲}{x})=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۳x+۱}{x-۵}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲}{x}$ $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۳x}{x}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{۲}{x}=۳-۰=۳$
۹	الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x^۲+x}{x^۲}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x(x+۱)}{x^۲}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x+۱}{x}=\frac{۱}{۰^+}=+\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۲-x+۱}{۴x^۳+۲x-۱}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۲x^۲}{۴x^۳}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۱}{۲x}=\frac{۱}{+\infty}=۰$
۱۰	الف) $\lim\limits_{x\to a^+}\frac{-۲x}{f(x)}=\frac{-۲a}{۰^-}=+\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to a^-}\frac{-۲x}{f(x)}=\frac{-۲a}{۰^+}=-\infty$ تابع $y=\frac{-۲x}{f(x)}$ در اطراف نقطه‌ی $x=a$ حد ندارد و رفتار بی کران دارد.
۱۱	الف) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{[x]-۲}{۳-x}=\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{۳-۲}{۳-x}=\lim\limits_{x\to ۳^+}\frac{۱}{۳-x}=\frac{۱}{۰^-}=-\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-۲x^۲}{۴x^۳+۲x-۱}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-۲x^۲}{۴x^۳}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{-۱}{۲x}=\frac{-۱}{+\infty}=۰$

۱۲	الف : $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{x+1}{\tan x}=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^+}\frac{\frac{\pi}{2}+1}{+\infty}=0$ $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{x+1}{\tan x}=\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{2})^-}\frac{\frac{\pi}{2}+1}{-\infty}=0$ $\longrightarrow \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{x+1}{\tan x}=0$ ب : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2+1}{x^3+2x^2+1}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{x^3}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$
۱۳	الف) $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{[x]+1}{x+1}=\frac{-2+1}{(-1)^-+1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5x-x^3}{3x^2+2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x^3}{3x^2}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{-x}{3}=+\infty$
۱۴	الف) $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=+\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=-\infty$
۱۵	الف) $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+1}{\|x-2\|}=\frac{3}{0^+}=+\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{\frac{4}{x}-2}=\frac{3+0}{0-2}=-\frac{3}{2}$
۱۶	$+\infty$
۱۷	الف) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\sin 5x+[-x]}{2x}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$ ب) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2+2}{5-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x^2}{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}-x=+\infty$

۱۸

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{3}} \dfrac{[x]-2}{|3x-1|} = \dfrac{0-2}{|3(\frac{1}{3})-1|} = \dfrac{-2}{0^+} = -\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to -\infty} (\dfrac{4x+2}{5-x} - \dfrac{8}{x}) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4x+2}{5-x} - \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{8}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{4x}{-x} - \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{8}{x}$

$= -4 - 0 = -4$

۱۹

$+\infty$

مجانب افقی و مجانب قائم

۱

$x^2 - 1 = 0 \to x^2 = 1 \to x = 1$

این عدد ریشه‌ی صورت تابع نیست، لذا خط $x = 1$ مجانب قائم است.

$$\lim_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{3x}{x^2-1} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{3}{x^2} = 0$$

لذا خط $y = 0$ مجانب افقی است.

۲

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \lim_{x\to -1} \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3} = \infty$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2-4x+3}{x^2-2x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{(x-3)(x-1)}{(x-3)(x+1)} = \frac{1}{2}$$

لذا طبق تعریف خط $x = -1$ مجانب قائم منحنی f است. ولی خط $x = 3$ مجانب قائم تابع نمی باشد.

روش دوم : مقدار $x = -1$ ریشه‌ی مخرج است ولی ریشه صورت نمی باشد، لذا خط $x = -1$ مجانب قائم منحنی f است. ولی مقدار ریشه‌ی مخرج و صورت است ، پس خط $x = 3$ مجانب قائم تابع نمی باشد.

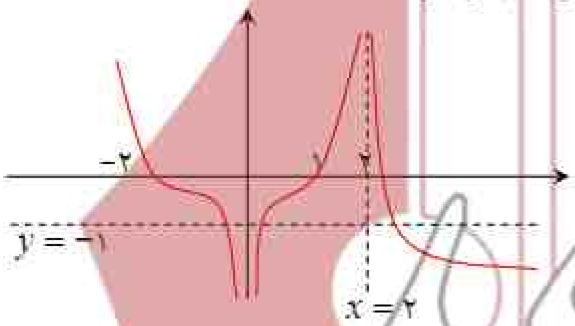
۳

$y = 1$ و $y = -2$

۴

$1 - x^2 = 0 \to x = 1 \quad , \quad x = -1$ مجانب های قائم

$\lim\limits_{x\to \pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{1+2x^2}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to \pm\infty} \dfrac{2x^2}{-x^2} = -2 \to y = -2$ مجانب افقی

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x+۳}{۲-x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{-x}=-۱\to y=-۱$ مجانب افقی $۲-x=۰\to x=۲$ مجانب قائم	۵
$x^{۲}-x=۰\to x(x-۱)=۰\to x=۱\quad ,\quad x=۰$ خط $x=۱$ مجانب قائم است ولی ریشه‌ی $x=۰$ ، ریشه‌ی صورت است و لذا نمی تواند مجانب قائم باشد. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۲}+x}{x^{۲}-x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^{۲}}{x^{۲}}=۱$ لذا خط $y=۱$ مجانب افقی است.	۶
نمودار های متفاوتی با این شرایط می توان رسم کرد. برای مثال :  	۷
$x^{۲}-۴=۰\to x^{۲}=۴\to x=\pm۲$ $D_f=R-\{+۲,-۲\}$ $x^{۲}-۴=۰\to x=\pm۲$ مجانب های قائم(ریشه های صورت نیستند.) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^{۲}-۴}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x}{x^{۲}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{۱}{x}=۰\to y=۰$ مجانب افقی	۸
تکرار سئوال ۷	۹

۱۰

$D_f = R - \{+1,-1\}$

$|x|-1=0 \rightarrow |x|=1 \rightarrow x=\pm 1$ مجانب های قائم (ریشه های صورت نیستند.)

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+5}{|x|-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x+5}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = 2 \rightarrow y=2$ مجانب افقی

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+5}{|x|-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x+5}{-x-1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2x}{-x} = -2 \rightarrow y=-2$ مجانب افقی

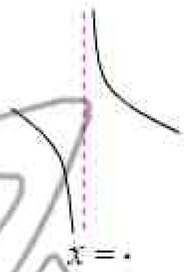
۱۱

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1+2x^2}{1-x^2} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x^2}{-x^2} = -2 \rightarrow y=-2$ مجانب افقی

$1-x^2=0 \rightarrow -x^2=-1 \rightarrow x^2=1 \rightarrow x=\pm 1$ مجانب های قائم

۱۲

$$x^2+x=0 \rightarrow x=0 \rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} \frac{x+1}{x^2+x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \frac{x+1}{x^2+x} = -\infty \end{cases}$$



۱۳

معادله‌ی $x^2+bx+c=0$ دارای یک ریشه است. لذا :

$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{b}{2} = -1 \rightarrow b=2$

از طرفی

$x=-1 \xrightarrow{x^2+bx+c=0} (-1)^2+b(-1)+c=0 \xrightarrow{b=2} 1-2+c=0 \rightarrow c=1$

۱۴

$2x^2+x=0 \rightarrow x=0 \ , \ x=-\frac{1}{2}$ مجانب های قائم

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2+1}{2x^2+x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{4x^2}{2x^2} = 2 \rightarrow y=2$ مجانب افقی

۱۵	$x^{۲}-۱=۰\to x=۱\ ,\quad x=-۱$ مجانب های قائم $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۱-۲x^{۲}}{x^{۲}-۱}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{-۲x^{۲}}{x^{۲}}=-۲\to y=-۲$ مجانب افقی
۱۶	$۲x+b=۰\to x=\dfrac{-b}{۲}\to -\dfrac{b}{۲}=-۱\to b=۲$ $\dfrac{a+۱}{۲}=۲\to a=۳$
۱۷	$x^{۲}+۳=۰\to x^{۲}=-۳\to$ تابع مجانب قائم ندارد. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x+۱}{x^{۲}+۳}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^{۲}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۱}{x}=۰\to y=۰$ مجانب افقی
۱۸	$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^{۲}-۹}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x}{x^{۲}}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{۱}{x}=۰\to y=۰$ مجانب افقی $x^{۲}-۹=۰\to x^{۲}=۹\to x=\pm۳$ مجانب های قائم

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

فصل چهارم حسابان۲ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

مفهوم مشتق

۱	۱
۲	-۳
۳	

محاسبه‌ی مشتق تابع در یک نقطه

۱	$f'(۰)=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{(x^۲-۳x+۲)-(۰)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{(x-۱)(x-۲)}{x-۱}$ $=\lim\limits_{x\to ۱}(x-۲)=۱-۲=-۱$
۲	$f(x)=\sqrt{x-۲}\to f(۳)=\sqrt{۳-۲}=۱$ $f'(۳)=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{f(x)-f(۳)}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{\sqrt{x-۲}-۱}{x-۳}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{\sqrt{x-۲}-۱}{x-۳}\cdot\dfrac{\sqrt{x-۲}+۱}{\sqrt{x-۲}+۱}$ $=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{\sqrt{x-۲}-۱}{x-۳}\cdot\dfrac{\sqrt{x-۲}+۱}{\sqrt{x-۲}+۱}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{(x-۲)-۱}{x-۳}\cdot\dfrac{۱}{\sqrt{x-۲}+۱}$ $=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x-۳}{x-۳}\cdot\dfrac{۱}{\sqrt{x-۲}+۱}=\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۱}{\sqrt{x-۲}+۱}=\dfrac{۱}{\sqrt{۳-۲}+۱}=\dfrac{۱}{۲}$ $m=\dfrac{۱}{۲}$ شیب خط مماس $y=m(x-x_۰)-y_۰$ $y=\dfrac{۱}{۲}(x-۳)-۱\to y=\dfrac{۱}{۲}x-\dfrac{۵}{۲}$ معادله خط مماس

۳	$f'(۱)=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{f(x)-f(۱)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{(x^۲-۳x)-(-۲)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{x^۲-۳x+۲}{x-۱}$ $=\lim\limits_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-۲)}{x-۱}=\lim\limits_{x\to ۱}(x-۲)=-۱$
۴	۱۸

مشتق پذیری و پیوستگی

۱	تابع در نقطه‌ی داده شده مشتق پذیر نیست، زیرا: $f(۲)=۰$ $f'_+(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{\|x-۲\|-۰}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{x-۲}{x-۲}=۱$ $f'_-(۲)=\lim\limits_{x\to ۲^-}\frac{\|x-۲\|-۰}{x-۲}=\lim\limits_{x\to ۲^+}\frac{-(x-۲)}{x-۲}=-۱$ و $f'_+(۲)\neq f'_-(۲)$ می باشد.
۲	تابع f در $x=-۱$ پیوسته است. $f(-۱)=(-۱)^۲+(-۱)=۱-۱=۰$ $f'_+(-۱)=\lim\limits_{x\to(-۱)^+}\frac{\|x^۲+x\|-۰}{x+۱}=\lim\limits_{x\to(-۱)^+}\frac{-x(x+۱)}{x+۱}=۱$ $f'_-(-۱)=\lim\limits_{x\to(-۱)^-}\frac{\|x^۲+x\|-۰}{x+۱}=\lim\limits_{x\to(-۱)^-}\frac{x(x+۱)}{x+۱}=-۱$ مشتق های راست و چپ تابع هر دو متناهی و نابرابرند،پس $x=-۱$ نقطه‌ی گوشه ای تابع است.

۳

کافی است که نشان دهیم: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$

$$\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}(x-a)\left(\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$$

$$=\lim_{x\to a}(x-a)\cdot\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=۰\cdot f'(a)=۰$$

$$\Rightarrow\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=۰\Rightarrow\lim_{x\to a}f(x)=f(a)$$

۴

$$f'(۰)=\lim_{x\to ۰}\frac{\sqrt[۳]{x}-۰}{x-۰}=\lim_{x\to ۰}\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}=+\infty$$

۵

$$f'_+(۲)=\lim_{x\to ۲^+}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{|x^۲-۴|-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}\frac{x^۲-۴}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲^+}\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}(x+۲)=۴$$

$$f'_-(۲)=\lim_{x\to ۲^-}\frac{f(x)-f(۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{|x^۲-۴|-۰}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x^۲-۴)}{x-۲}$$

$$=\lim_{x\to ۲^-}\frac{-(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲^+}-(x+۲)=-۴$$

و چون $f'_+(۲)\neq f'_-(۲)$ پس تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست.

۶	$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x^2+3)-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}$ $=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$ $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{(3x+1)-4}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{3x-3}{x-1}$ $=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{3(x-1)}{x-1}=3$ و چون $f'_+(1)\neq f'_-(1)$ پس تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست.
۷	درست
۸	مشتق راست $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\lvert x^2-1\rvert-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x-1}$ $=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2$ مشتق چپ $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\lvert x^2-1\rvert-0}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-(x^2-1)}{x-1}$ $=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{-(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}-(x+1)=-2$ و چون $f'_+(1)\neq f'_-(1)$ تابع در نقطه‌ی $x=1$ مشتق پذیر نیست.
۹	درست
۱۰	مماس قائم

۱۱	$f'_+(\cdot) = \lim\limits_{x \to \cdot^+} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim\limits_{x \to \cdot^+} \frac{x^{۲}}{x} = \lim\limits_{x \to \cdot^+} x = \cdot$ $f'_-(\cdot) = \lim\limits_{x \to \cdot^-} \frac{f(x) - f(\cdot)}{x - \cdot} = \lim\limits_{x \to \cdot^-} \frac{x}{x} = \lim\limits_{x \to \cdot^-} ۱ = ۱$ و چون مشتقات چپ و راست تابع در نقطه‌ی نابرابرند، پس تابع در این نقطه مشتق پذیر نیست.
۱۲	نادرست

۱۳ تابع در $x=1$ پیوسته است.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}(ax+b)=a+b$$ حد راست

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(x^3-2x)=1-2=-1$$ حد چپ

$$f(1)=(1)^3-2(1)=1-2=-1$$ مقدار

$$\Rightarrow a+b=-1\to b+1=-a$$

مشتق راست و چپ تابع در $x=1$ برابرند.

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{(ax+b)-(-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax+b+1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{ax-a}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{a(x-1)}{x-1}=a$$

$$f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x^3-2x)-(-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^3-2x+1}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x^2+x-1)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x^2+x-1)=1+1-1=1$$

$$f'_+(1)=f'_-(1)\to a=1$$

$$a+b=-1\xrightarrow{a=1} b=-2$$

روش دوم

$$f(x)=\begin{cases}ax+b & x>1\\ x^3-2x & x\le 1\end{cases}\to f'(x)=\begin{cases}a & x>1\\ 3x^2-2 & x\le 1\end{cases}$$

$$f'_+(1)=\lim_{x\to 1^+}f'(x)=a \quad , \quad f'_-(1)=\lim_{x\to 1^-}f'(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x^2-2)=1$$

$$f'_+(1)=f'_-(1)\to a=1$$

$$a+b=-1\xrightarrow{a=1} b=-2$$

<table>
<tr><td>۱۴</td><td>

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_+(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x^2-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+} x=0 \\ f'_-(0)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0 \end{array}\right\}\to f'_+(0)=f'_-(0)$$

لذا تابع داده شده در $x=0$ مشتق پذیر است.

</td></tr>
<tr><td>۱۵</td><td>نادرست</td></tr>
<tr><td>۱۶</td><td>نادرست</td></tr>
<tr><td>۱۷</td><td>

حد راست $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(x^2+1)=2$

حد چپ $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(2x)=2$

مقدار $f(1)=(1)^2+1=2$

لذا تابع در نقطه‌ی $x=1$ پیوسته است.

مشتق راست $f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x^2+1)-(2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2-1}{x-1}$

$$=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$$

مشتق چپ $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(2x)-(2)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{2(x-1)}{x-1}=2$

</td></tr>
<tr><td>۱۸</td><td>پیوسته</td></tr>
<tr><td>۱۹</td><td>

$f'_+(1)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=-1$ و $f'_-(1)=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{1-1}{x-1}=0$

و چون $f'_+(1)\neq f'_-(1)$ لذا $f'(1)$ موجود نیست.

</td></tr>
</table>

۲۰	نادرست
۲۱	ابتدا معادله‌ی تابع را به صورت چند ضابطه ای می نویسیم. $f(x)=\begin{cases}۴x(۱-x) & x\geq ۰\\ ۴x(۱+x) & x<۰\end{cases} \rightarrow f(x)=\begin{cases}۴x-۴x^۲ & x\geq ۰\\ ۴x+۴x^۲ & x<۰\end{cases}$ اکنون پیوستگی تابع را در نقطه‌ی $x=۰$ بررسی می کنیم. $\lim\limits_{x\to ۰^+} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^+}(۴x-۴x^۲)=۰$ $\lim\limits_{x\to ۰^-} f(x)=\lim\limits_{x\to ۰^-}(۴x+۴x^۲)=۰$ در نهایت مشتقات یک طرفه را در نقطه‌ی $x=۰$ بررسی می کنیم. $f'_+(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{۴x-۴x^۲}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^+}\frac{x(۴-۴x)}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^+}(۴-۴x)=۴$ $f'_-(۰)=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{۴x+۴x^۲}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^-}\frac{x(۴+۴x)}{x}=\lim\limits_{x\to ۰^-}(۴+۴x)=۴$ و چون تابع داده شده در نقطه‌ی داده شده پیوسته بوده و در این نقطه مشتقات یک طرفه مساویند، لذا تابع در نقطه‌ی $x=۰$ مشتق پذیر است.
۲۲	$f'_+(-۱)=\lim\limits_{x\to(-۱)^+}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim\limits_{x\to(-۱)^+}\frac{x+۲-۱}{x+۱}=۱$ $f'_-(-۱)=\lim\limits_{x\to(-۱)^-}\frac{f(x)-f(-۱)}{x+۱}=\lim\limits_{x\to(-۱)^-}\frac{x^۲-۱}{x+۱}=-۲$ و چون $f'_+(-۱)\neq f'_-(-۱)$ ، لذا $f'(-۱)$ موجود نیست.

تعبیر هندسی مشتق

۱	الف : a ب : d پ : b
۲	نادرست

۳

A

۴

نمودار (ب) : سهمی نمودار داده شده رو به پایین است. پس ضریب x^2 منفی است. لذا در مشتق تابع ضریب x منفی خواهد بود. در نتیجه نمودار مشتق، خطی با شیب منفی است.

۵

نقطه	شیب
D	۰
C	۲
B	۰/۵
A	−۰/۵

۶

i) ب (E) ii) الف (مثبت) iii) ب (کمتر)

۷

الف) $A\begin{vmatrix}2\\3\end{vmatrix}\ ,\ B\begin{vmatrix}0\\1\end{vmatrix} \to m = f'(2) = \frac{3-1}{2-0} = 1$

ب) $y - 3 = 1(x-2) \to y = x+1$

۸

$f(2) = 16$

$f'(x) = -2x + 10 \quad \to \quad f'(2) = 6$ شیب خط مماس

معادله‌ی خط مماس $y - 16 = 6(x-2) \to y = 6x + 4$

۹

x	$f(x)$
d	۰
b	۰/۵
c	۲
a	−۰/۵

۱۰	با توجه به شیب خط مماس در نقاط تعیین شده شیب: ۲-، ۱-، ۰/۵، ۲ نقطه: D، B، A، C
۱۱	$m_B > 0$ و $m_A < 0$ و $m_{AB} = 0$ $\Rightarrow m_A < m_{AB} < m_B$
۱۲	شیب خط مماس $f'(x) = 3x^2 - 2 \to f'(1) = 3(1)^2 - 2 = 1 \to m = 1$ $f(x) = x^3 - 2x \to f(1) = (1)^3 - 2(1) = -1 \to \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$ معادله‌ی خط مماس $y = m(x-a) + b \to y = 1(x-1) + (-1) = x - 2$
۱۳	الف : $x = b$ ب: $x = d$ پ : $x = c$
۱۴	$f(4) = 25 \to A(4,25)$ شیب خط مماس $f'(4) = \frac{3}{2} \to m = \frac{3}{2}$ معادله‌ی خط مماس $y = m(x-a) + b \to y = \frac{3}{2}(x-4) + 25$ $x = 5 \to y = \frac{3}{2}(5-4) + 25 = 26/5 \Rightarrow B(5,26/5)$ $x = 3 \to y = \frac{3}{2}(3-4) + 25 = 23/5 \Rightarrow C(3,23/5)$

محاسبه‌ی مشتق

۱	$(f+g)'(2) = f'(2) + g'(2) = 1 + 2 = 3$ $(fg)'(2) = f'(2)g(2) + f(2)g'(2) = (1)(-3) + (3)(2) = -3 + 6 = 3$
۲	۷

۳	$A\left\lvert\begin{matrix}2\\4\end{matrix}\right. , B\left\lvert\begin{matrix}0\\0\end{matrix}\right. \ \square \to m=f'(1)=\dfrac{4-0}{2-0}=2 \qquad , \qquad f(1)=2$ $C\left\lvert\begin{matrix}0\\4\end{matrix}\right. , D\left\lvert\begin{matrix}4\\0\end{matrix}\right. \ \square \to m=g'(1)=\dfrac{4-0}{0-4}=-1 \qquad , \qquad g(1)=3$ $h'(1)=\dfrac{f'(1)g(1)-f(1)g'(1)}{g^2(1)}=\dfrac{(2)(3)-(2)(-1)}{9}=\dfrac{8}{9}$
۴	۱۹
۵	$(3f+2g)'(1)=3f'(1)+2g'(1)=3(3)+2(5)=19$

مشتق گیری از توابع

۱	الف) $y=\dfrac{2x(x^3+2x-5)-(x^2+1)(3x^2+2)}{(x^3+2x-5)^2}$ ب) $y=-3\cdot 2\cos(-3x+1)(-\sin(-3x+1))$
۲	الف) $y=\dfrac{2x(x^3+2x+1)-(x^2-1)(3x^2+2)}{(x^3+2x+1)^2}$ ب) $y=-6\cdot \sin(2x)\cos^2(2x)$
۳	الف) $y=\dfrac{2x(5x^3-3x+1)-x^2(15x^2-3)}{(5x^3-3x+1)^2}$ ب) $y=3\cdot 2\cos(2x+1)\sin^2(2x+1)$
۴	الف) $f'(x)=4(6x^2+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}})(2x^3+\sqrt[3]{x}-1)^3$ ب) $f'(x)=-\dfrac{(1)(x^2+1)-2x(x)}{(x+1)^2}\cdot\sin(\dfrac{x}{x^2+1})$

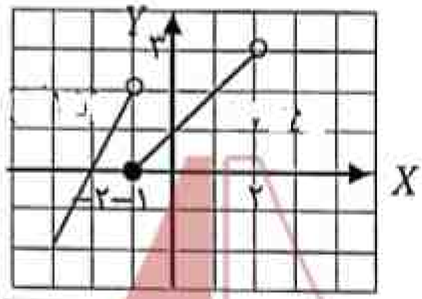
۵	الف) $y'=\dfrac{۲(x^۳-۲x^۲)-(۳x^۲-۴x)(۲x+۳)}{(x^۳-۲x^۲)^۲}$ ب) $y'=۳\cdot ۲\cos(۲x+۱)\sin^۲(۲x+۱)$
۶	الف) $f'(x)=\dfrac{(۲x-۳)(-۳x+۲)-(-۳)(x^۲-۳x+۱)}{(-۳x+۲)^۲}$ ب) $g'(x)=\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}(۳x^۲+۵)+(۶x)\sqrt{x}$ پ) $h'(x)=۳\cos x\sin^۲ x-۲\sin x\cos x$
۷	الف) $f'(x)=۳(۲x)(x^۲+۱)^۲(۵x-۱)+۵(x^۲+۱)^۳$ ب) $f'(x)=\dfrac{-۵\sin x(۱-\sin x)-(\cos x)(۵\cos x)}{(۱-\sin x)^۲}$
۸	الف) $f(x)=u.v\rightarrow f'(x)=u'v+v'u$ $u=۲\sqrt{x}\rightarrow u'=۲\cdot\dfrac{۱}{۲\sqrt{x}}=\dfrac{۱}{\sqrt{x}}$ $v=۵x^۲-۳x\rightarrow v'=۱۰x-۳$ $f'(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x}}(۵x^۲-۳x)+۲\sqrt{x}(۱۰x-۳)$ ب) $g(x)=\sin ۳x+\cos^۲(۴x^۳-۲)$ $g'(x)=۳\cos ۳x-۲(۱۲x^۲)\sin(۴x^۳-۲)\cos(۴x^۳-۲)$
۹	الف) $f'(x)=(\dfrac{۳}{۲\sqrt{۳x+۲}})(x^۳+۱)+(۳x^۲)(\sqrt{۳x+۲})$ ب) $g'(x)=۷(۲x+۳)(x^۲+۳x+۱)^۶$ پ) $h'(x)=\dfrac{(۲x-۵)(-۲x+۹)-(-۲)(x^۲-۵x+۷)}{(-۲x+۹)^۲}$

۱۰	الف) $f'(x)=12x^2(2x-1)^4+4(2x-1)^3(2)(4x^3-7)$ ب) $g'(x)=\dfrac{-\cos x(\cos x)-(-\sin x)(1-\sin x)}{\cos^2 x}$
۱۱	الف) $f'(x)=\dfrac{3}{2\sqrt{3x}}(2x^3-1)+(\sqrt{3x}+1)(6x^2)$ ب) $g'(x)=6(\tan x)(1+\tan^2 x)+2x(-\sin x^2)$ پ) $h'(x)=\dfrac{(2x-3)(5x)-(5)(x^2-3x)}{(5x)^2}$
۱۲	الف) $f'(x)=\dfrac{(2\cos\frac{x}{2})(x^2+\sqrt{x})-(2x+\frac{1}{2\sqrt{x}})(4\sin\frac{x}{2})}{(x^2+\sqrt{x})^2}$ ب) $g'(x)=3(x^2-6x)^2+3x(2x-6)(x^2-6x)^2-2\sin 2x$
۱۳	۵
۱۴	الف) $f'(x)=3(2x)(x^2-6)^2(\frac{1}{4}x+1)+\frac{1}{4}(x^2-6)^3$ ب) $g'(x)=3(5)\cos(5x)\sin^2(5x)$ ج) $h'(x)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}(x^3-2x+1)-(3x^2-2)\sqrt{x}}{(x^3-2x+1)^2}$

مشتق تابع مرکب و قاعده زنجیری

۱	

مشتق پذیری روی یک بازه

۱	تابع f در $x=-1$ پیوسته نیست. لذا در این نقطه مشتق پذیر هم نیست. در نتیجه در بازه‌ی $[-2,0]$ مشتق نیز پذیر نیست. 

مشتق مرتبه دوم

۱	$f'(x)=2\sin x\cos x+2\sin 2x=\sin 2x+2\sin 2x=3\sin 2x$ $f''(x)=6\cos 2x \xrightarrow{x=\frac{\pi}{6}} f''(\frac{\pi}{6})=6\cos 2(\frac{\pi}{6})=6\cos(\frac{\pi}{3})=6\cdot\frac{1}{2}=3$

آهنگ متوسط تغییر و آهنگ لحظه ای تغییر

۱	$m'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+2t \to m'(9)=\frac{1}{2\sqrt{9}}+2(9)=\frac{1}{6}+18=\frac{109}{6}$
۲	$f(x)=x^3-2x \to \begin{cases} f(2)=(2)^3-2(2)=8-4=4 \\ f(0)=(0)^3-2(0)=0 \end{cases}$ آهنگ تغییر متوسط $\frac{f(2)-f(0)}{2-0}=\frac{4-0}{2}=2$ $f'(x)=3x^2-2 \xrightarrow{x=1} f'(1)=3(1)^2-2=1$ آهنگ تغییر لحظه ای
۳	$m'(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}+4t \to m'(4)=\frac{1}{2\sqrt{4}}+4(4)=\frac{1}{4}+16=\frac{65}{4}$
۴	$f'(x)=4x+5 \Rightarrow \begin{cases} f'(-1)=1 \\ f'(2)=13 \end{cases}$ ۱۳ برابر

۵	درست
۶	$f(۵)=(۵)^۲-(۵)+۱۰=۲۵-۵+۱۰=۳۰$ $f(۰)=(۰)^۲-(۰)+۱۰=۱۰$ سرعت متوسط $\frac{\Delta y}{\Delta t}=\frac{f(۵)-f(۰)}{۵-۰}=\frac{۳۰-۱۰}{۵}=۴$ سرعت لحظه ای $f'(t)=۲t-۱$ $f'(t)=۴\to ۲t-۱=۴\to t=\frac{۵}{۲}$
۷	-۴
۸	درست
۹	الف) $m(t)=\sqrt{t}+t^۲\to\begin{cases}m(۳)=\sqrt{۳}+(۳)^۲=۹+\sqrt{۳}\\m(۴)=\sqrt{۴}+(۴)^۲=۲+۱۶=۱۸\end{cases}$ $\frac{\Delta m}{\Delta t}=\frac{m(۴)-m(۳)}{۴-۳}=۱۸-(۹+\sqrt{۳})=۹-\sqrt{۳}$ ب) $m'(t)=\frac{۱}{۲\sqrt{t}}+۲t\to m'(۹)=\frac{۱}{۲\sqrt{۹}}+۲(۹)=\frac{۱}{۶}+۱۸=\frac{۱۰۹}{۶}$
۱۰	$\frac{۱}{۶}$
۱۱	$f'(t)=-۴t+۱۰\to f'(۲)=-۸+۱۰=۲$
۱۲	الف) $h(۲)=-۵(۲)^۲+۴۰(۲)=-۲۰+۸۰=۶۰$ و $h(۱)=-۵(۱)^۲+۴۰(۱)=-۵+۴۰=۳۵$ $\Rightarrow\frac{h(۲)-h(۱)}{۲-۱}=\frac{۶۰-۳۵}{۱}=۲۵$ ب) $h'(t)=-۱۰t+۴۰\to h'(۳)=-۱۰(۳)+۴۰=۱۰$

۱۳	آهنگ لحظه ای $f'(t)=-\frac{۲۴۰}{t^{۲}} \to f'(۴)=-\frac{۲۴۰}{(۴)^{۲}}=-۱۵$ آهنگ متوسط $\frac{f(۵)-f(۳)}{۵-۳}=\frac{۴۸-۸۰}{۲}=-۱۶$ اختلاف آهنگ لحظه ای و آهنگ متوسط $-۱۵-(-۱۶)=۱$
۱۴	$d'(t)=t^{۲}+۱۰\ \square^{t}\square \to d'(۲)=(۲)^{۲}+۱۰=۱۴$

پاسخ سوالات موضوعی نهایی

فصل پنجم حسابان۲ پایه دوازدهم ریاضی فیزیک

اکسترمم های یک تابع و توابع صعودی و نزولی

<table dir="rtl">
<tr><td>۱</td><td>مثبت</td></tr>
<tr><td>۲</td><td>$f'(x)=\dfrac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x+4}} \xrightarrow{f'(x)=0} 2x-2=0 \to x=1$
مینیمم مطلق $f(1)=\sqrt{3}$ ماکزیمم مطلق $f(0)=f(2)=2$</td></tr>
<tr><td>۳</td><td>$f'(x)=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} \xrightarrow{f'(x)=0} x=0$
<table>
<tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>0</td><td>$+\infty$</td></tr>
<tr><td>$f'(x)$</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>$\searrow$</td><td>0</td><td>$\nearrow$</td></tr>
</table>
تابع در فاصله‌ی $(-\infty,0)$ نزولی و در فاصله‌ی $(0,+\infty)$ صعودی است.</td></tr>
<tr><td>۴</td><td>مثبت</td></tr>
<tr><td>۵</td><td>الف) نادرست   ب) درست</td></tr>
<tr><td>۶</td><td>$f(x)=\frac{1}{3}x^3-x \to f'(x)=x^2-1 \xrightarrow{f'(x)=0} x^2-1=0 \to x=\pm 1$
$\to \begin{cases} x=0 \to f(0)=0 \\ x=1 \to f(1)=-\frac{2}{3} \\ x=-1 \to f(-1)=\frac{2}{3} \\ x=2 \to f(2)=\frac{2}{3} \end{cases}$
لذا $f(-1)=f(2)=\frac{2}{3}$ ماکزیمم مطلق و $f(1)=-\frac{2}{3}$ مینیمم مطلق است.</td></tr>
</table>

۷	$f'(x)=x^2+2x \xrightarrow{f'(x)=0} x=0\ ,\ x=-2$ $f(0)=0 \quad , \quad f(-2)=\frac{2}{3} \quad , \quad f(3)=18$ لذا ماکزیمم مطلق تابع برابر ۱۸ و مینیمم مطلق آن صفر می باشد. <table><tr><td>x</td><td></td><td>-2</td><td></td><td>0</td><td></td></tr><tr><td>f'</td><td>$+$</td><td>0</td><td>$-$</td><td>0</td><td>$+$</td></tr><tr><td>f</td><td>$\nearrow$</td><td>$\frac{4}{3}$</td><td>$\searrow$</td><td>0</td><td>$\nearrow$</td></tr></table> همچنین مینیمم نسبی تابع صفر می باشد.
۸	$f'(x)=6x^2+6x-12 \xrightarrow{f'(x)=0} \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \end{cases}$ ریشه‌ی $x=-2$ قابل قبول نمی باشد. $f(-1)=13\ ,\ f(2)=4\ ,\ f(1)=-7 \ \Rightarrow \min:(1,-7)\ ,\ \max:(-1,13)$
۹	نادرست
۱۰	$(-2,2)$
۱۱	الف : نقاط اکسترمم های نسبی تابع عبارتند از $(1,0)$ و $(0,1)$ و $(-1,0)$ ب : نقاط اکسترمم های مطلق تابع عبارتند از $(3,8)$ و $(1,0)$ و $(-1,0)$ پ : خیر، زیرا در نقطه‌ی $(1,0)$ از این فاصله مشتق پذیر نیست.
۱۲	$x^2+1=0 \rightarrow x^2=-1$ معادله ریشه ندارد $\Rightarrow \quad D_f=R$ $f'(x)=\frac{1(x^2+1)-2x(x)}{(x^2+1)^2}=\frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2} \xrightarrow{f'(x)=0} -x^2+1=0 \rightarrow x^2=1$ $\rightarrow x=1 \quad , \quad x=-1$ نقاط بحرانی

۱۳

x	$-2 \le x < -1$	$-1 \le x \le 2$
$f(x)$	$f(x)=x^2-x-1$	$f(x)=x^2+x+1$
$f'(x)$	$f'(x)=2x-1$	$f'(x)=2x+1$
$f'(x)=0$	$x=\frac{1}{2}$ غیر قابل قبول	$x=-\frac{1}{2}$

و چون $f'_+(-1) \neq f'_-(-1)$ ، لذا تابع در نقطه‌ی $x=-1$ مشتق پذیر نیست.

اکنون عرض نقاط $x=2$ و $x=-2$ و $x=-\frac{1}{2}$ و $x=-1$ را تعیین و مقایسه می کنیم.

$x=-2 \to f(-2)=(-2)^2+|-2+1|=4+1=5$

$x=2 \to f(2)=(2)^2+|2+1|=4+3=7$ ماکزیمم مطلق

$x=-\frac{1}{2} \to f(-\frac{1}{2})=(-\frac{1}{2})^2+|-\frac{1}{2}+1|=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$ مینیمم مطلق

$x=-1 \to f(-1)=(-1)^2+|-1+1|=1$

۱۴

$f'(x)=6x^2+6x-12 \xrightarrow{f'(x)=0} 6x^2+6x-12=0 \xrightarrow{\div 6} x^2+x-2=0$

$\to x=1 \quad , \quad x=-2$

$$\left.\begin{array}{l} f(-1)=13 \\ f(1)=-7 \\ f(3)=45 \end{array}\right\} \to \min:(1,-7) \quad , \quad \max:(3,45)$$

۱۵

$f(x)=x^3-3x+1 \to f'(x)=3x^2-3 \xrightarrow{f'(x)=0} 3x^2-3=0 \to 3x^2=3$

$\to x^2=1 \to x=\pm 1$

$$\left\{\begin{array}{l} f(1)=-1 \\ f(-1)=3 \\ f(2)=3 \end{array}\right. \to \left\{\begin{array}{l} \min(f)=-1 \\ \max(f)=3 \end{array}\right.$$

۱۶

الف : درست　　　ب: درست

۱۷

$$f'(x)=3x^2-6x \xrightarrow{f'(x)=0} \begin{cases} x=0 \\ x=2\notin[-1,1] \end{cases}$$

$$f(1)=(1)^3-3(1)^2+1=1-3+1=-1$$

$$f(0)=(0)^3-3(0)^2+1=1$$ ماکزیمم مطلق

$$f(-1)=(-1)^3-3(-1)^2+1=-1-3+1=-3$$ مینیمم مطلق

۱۸

$$f(0)=1 \xrightarrow{f(x)=ax^3+bx^2+c} a(0)^3+b(0)^2+c=1 \rightarrow c=1$$

$$f(1)=2 \xrightarrow{f(x)=ax^3+bx^2+1} a(1)^3+b(1)^2+1=2 \rightarrow a+b=1$$

$$f''\left(\frac{1}{2}\right)=0 \xrightarrow{f''(x)=6ax+2b=0} 6a\left(\frac{1}{2}\right)+2b=0 \rightarrow 3a+2b=0$$

$$\begin{cases} a+b=1 \\ 3a+2b=0 \end{cases} \rightarrow a=-2\ ,\ b=3$$

۱۹

$$g'(x)=3x^2+2\neq 0$$

$$g(-2)=-8-4-5=-17\ \min$$

$$g(1)=1+2-5=-2\ \max$$

بهینه سازی

۱

طول جعبه $16-2x \quad , \quad x\in(0,8)$

عرض جعبه $6-2x \quad ; \quad x\in(0,3)$

حجم جعبه $v(x)=x(16-2x)(6-2x) \rightarrow v(x)=4x^3-44x^2+96x \quad ; \quad x\in(0,3)$

$$v'(x)=12x^2-88x+96 \xrightarrow{v'(x)=0} 12x^2-88x+96=0$$

$$\xrightarrow{\div 4} 3x^2-22x+24=0 \rightarrow x=6 \quad , \quad x=\frac{4}{3}$$

و چون $6\notin(0,3)$ لذا فقط $x=\frac{4}{3}$ قابل قبول است و به ازای این مقدار، جعبه‌ی مذکور بیشترین حجم را دارد.

آزمون مشتق اوّل

۱	$f(x)=-x^4+ax+b \to f'(x)=-4x^3+a \xrightarrow{f'(1)=0} -4+a=0 \to a=4$ $f(1)=2 \to -1+4+b=2 \to b=-1$
۲	$f(x)=x^3+ax+b \to f'(x)=3x^2+a \xrightarrow{f'(1)=0} 3+a=0 \to a=-3$ $f(x)=x^3+ax+b \xrightarrow{f(1)=2} 1+a+b=2 \xrightarrow{a=-3} b=4$
۳	$f(x)=x^3+bx^2+d \xrightarrow{f(2)=1} 1=8+4b+d \to 4b+d=-7$ $f'(x)=3x^2+2bx \xrightarrow{f'(2)=0} 0=12+4b \to b=-3$ $4b+d=-7 \xrightarrow{b=-3} -12+d=-7 \to d=5$
۴	درست

جهت تقعر نمودار یک تابع و نقطه‌ی عطف

۱	$f'(x)=-3x^2+6x \to f''(x)=-6x+6 \xrightarrow{f''(x)=0} x=1$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 1 & & +\infty \\ \hline y'' & & + & 0 & - & \\ \hline y & & \cup & 3 & \cap & \\ & & & \text{عطف} & & \end{array}$ نقطه‌ی عطف $(1,3)$
۲	$f(x)=ax^3+bx^2-1 \xrightarrow{f(1)=1} a+b-1=1 \to a+b=2$ $f'(x)=3ax^2+2bx \to f''(x)=6ax+2b \xrightarrow{f''(1)=0} 6a+2b=0$ $\to \begin{cases} a+b=2 \\ 6a+2b=0 \end{cases} \to a=-1 \ , \ b=3$

۳

$$f(x)=x^{3}+3x+1 \rightarrow f'(x)=3x^{2}+3 \rightarrow f''(x)=6x$$

$$f''(x)=0 \rightarrow 6x=0 \rightarrow x=0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	$\cap$	1 عطف	$\cup$

نقطه‌ی عطف $(0,1)$

۴

$$y'=\frac{-2}{(x-1)^{2}} \quad , \quad y''=\frac{4}{(x-1)^{3}}$$

$$x-1=0 \rightarrow x=1$$

در بازه‌ی $(1,+\infty)$ تقعر رو به بالا و در بازه‌ی $(-\infty,1)$ تقعر رو به پایین است.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f''		$-$		$+$	
f	1	$\cap$ $-\infty$		$+\infty$ $\cup$	1

تابع نقطه‌ی عطف ندارد.

۵

الف : نقطه‌ی C ب : نقطه‌ی D

۶

$f'(x)=3x^2+6x$

$f''(x)=6x+6 \xrightarrow{f''(x)=0} 6x+6=0 \rightarrow x=-1$

$f(-1)=(-1)^3+3(-1)^2+1=-1+3+1=3$

لذا نقطه‌ی $(-1,3)$ نقطه‌ی عطف نمودار تابع است. جهت تقعر را نیز می توان به صورت زیر تعیین کرد.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y''	$-$	0	$+$
y	$-\infty$ $\cap$	3 عطف	$+\infty$ $\cup$

۷

$f'(x)=3ax^2+2bx \rightarrow f''(x)=6ax+2b$

$\xrightarrow{x=\frac{1}{2}} 6a(\frac{1}{2})+2b=0 \rightarrow 3a+2b=0$

$f(x)=ax^3+bx^2+1 \xrightarrow{f(1)=2} a(1)^3+b(1)^2+1=2 \rightarrow a+b=1$

$\begin{cases} 3a+2b=0 \\ a+b=1 \end{cases} \rightarrow a=-2 \quad , \quad b=3$

۸

$f'(x)=-3x^2+6x \rightarrow f''(x)=-6x+6 \xrightarrow{f''(x)=0} -6x+6=0 \rightarrow x=1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
y''	$+$	0	$-$
y	$+\infty$ $\cup$	3 عطف	$-\infty$ $\cap$

۹ نادرست

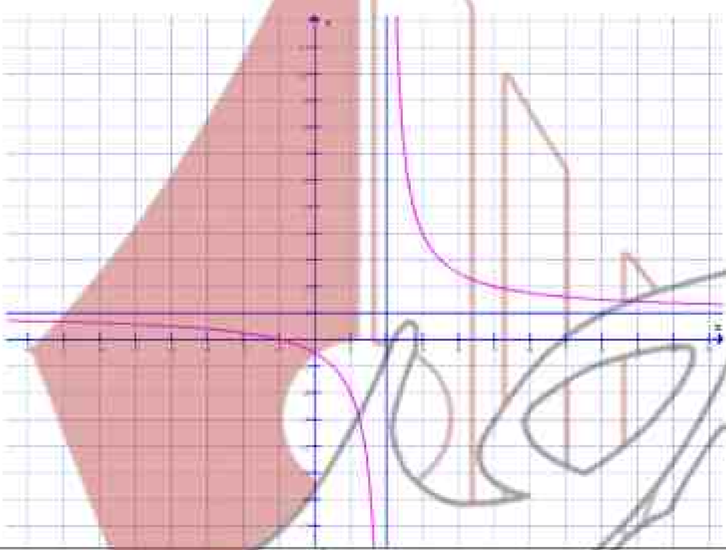
۱۰ الف: نادرست ب : درست

۱۱	$f(x)=x^3+ax^2+bx-1 \to f'(x)=3x^2+2ax+b \to f''(x)=6x+2a$ $f(-1)=(-1)^3+a(-1)^2+b(-1)-1=-1+a-b-1=a-b-2$ $\xrightarrow{f(-1)=1} a-b-2=1 \to a-b=3$ $f''(-1)=6(-1)+2a=-6+2a \xrightarrow{f''(-1)=0} -6+2a=0 \to a=3$ $a-b=3 \xrightarrow{a=3} 3-b=3 \to b=0$
۱۲	$D_f=R$ $f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x-1)^2}} \to f''(x)=\dfrac{-2}{9\sqrt[3]{(x-1)^5}}$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & -\infty & & 1 & & +\infty \\ \hline f'' & & + & \text{تعریف نشده} & - & \\ & & \cup & & \cap & \end{array}$ $f'(1)=+\infty$ پس تابع در $x=1$ مماس قائم دارد و $x=1$ نقطه‌ی عطف است.
۱۳	نادرست
۱۴	C

۱

$y'=\frac{-۳}{(x-۲)^{۲}}$ و مجانب افقی $y=۱$ و مجانب قائم $x=۲$

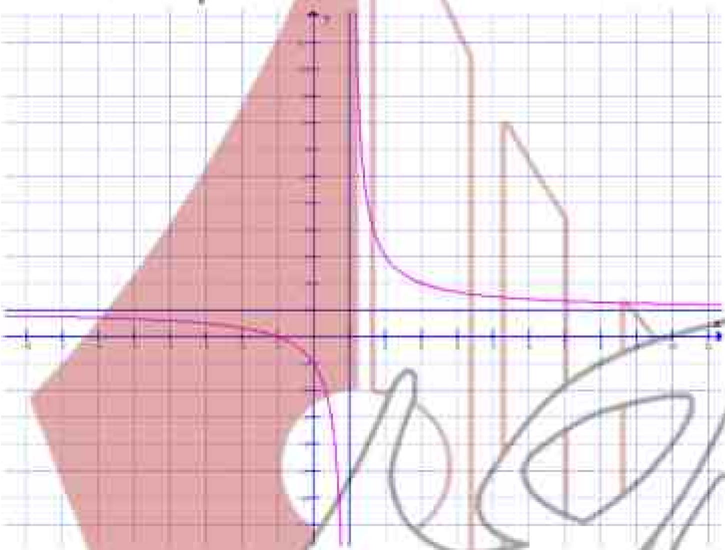
x	$-\infty$		۲		$+\infty$
y'		$-$	$\parallel$	$-$	
y	۱	↘	$-\infty \parallel +\infty$	↘	۱



۲

$y'=\frac{-2}{(x-1)^2}<0$ و مجانب افقی $y=1$ و مجانب قائم $x=1$

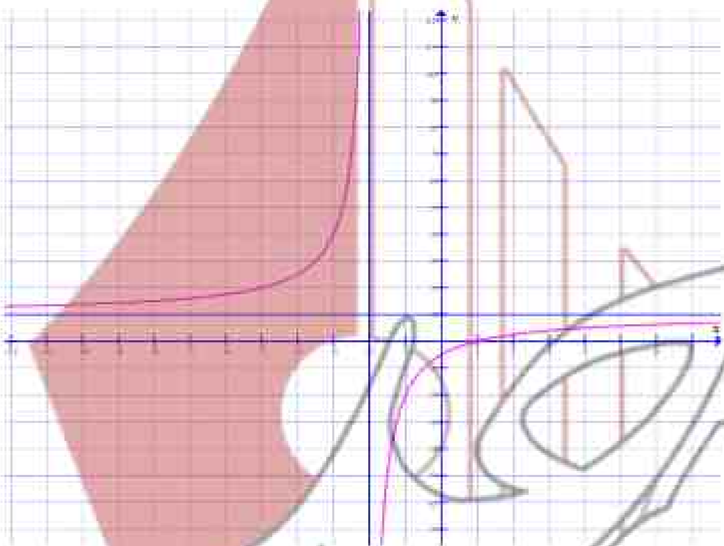
x	$-\infty$		1		$+\infty$
y'		$-$	$\parallel$	$-$	
y	1	$\searrow$	$-\infty \parallel +\infty$	$\searrow$	1



۳

$y'=\frac{۳}{(x-۲)^{۲}}$ و مجانب افقی $y=۱$ و مجانب قائم $x=-۲$

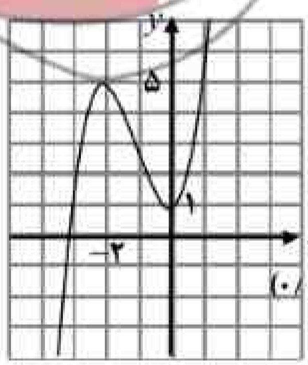
x	$-\infty$		-۲		$+\infty$
y'		$+$	$\Vert$	$+$	
y	۱	$\nearrow$ $+\infty$	$\Vert$	$\nearrow$	۱



۴

$y'=۳x^{۲}+۶x \xrightarrow{y'=۰} x=۰\ ,\ x=-۲$

x	$-\infty$		-۲		۰		$+\infty$
f'		$+$	۰	$-$	۰	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	۵	$\searrow$	۱	$\nearrow$	$+\infty$
			ماکزیمم		مینیمم		



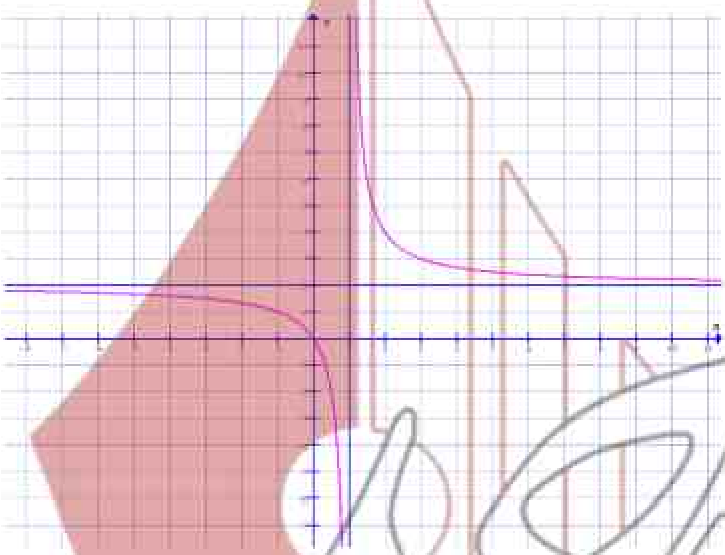
(۰/۵)

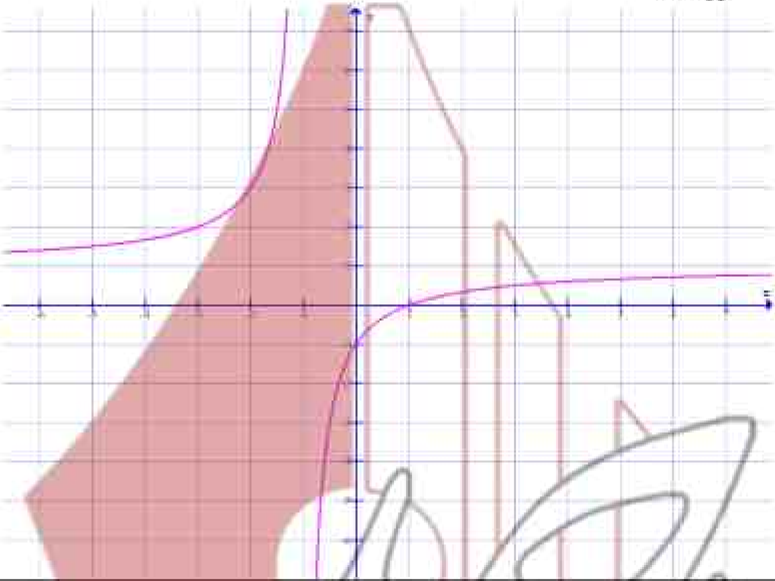
۵

$$f'(x)=\frac{-۲}{(x-۱)^۲}<۰$$

مجانب قائم $x=۱$ و مجانب افقی $y=۲$

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
f'		$-$	‖	$-$	
f	۲	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	۲



۶	مجانب قائم $x=-۱$ مجانب افقی $x=۱$ $f'(x)=\frac{۱(x+۱)-۱(x-۱)}{(x+۱)^۲}=\frac{۲}{(x+۱)^۲}>۰$ 

x	$-\infty$	-۱	$+\infty$
y'	+		+
y	۱ ↗ $+\infty$	ن ‖ $-\infty$	↗ ۱

۷

مجانب قائم $x-۱=۰ \to x=۱$

$D_f = R - \{۱\}$

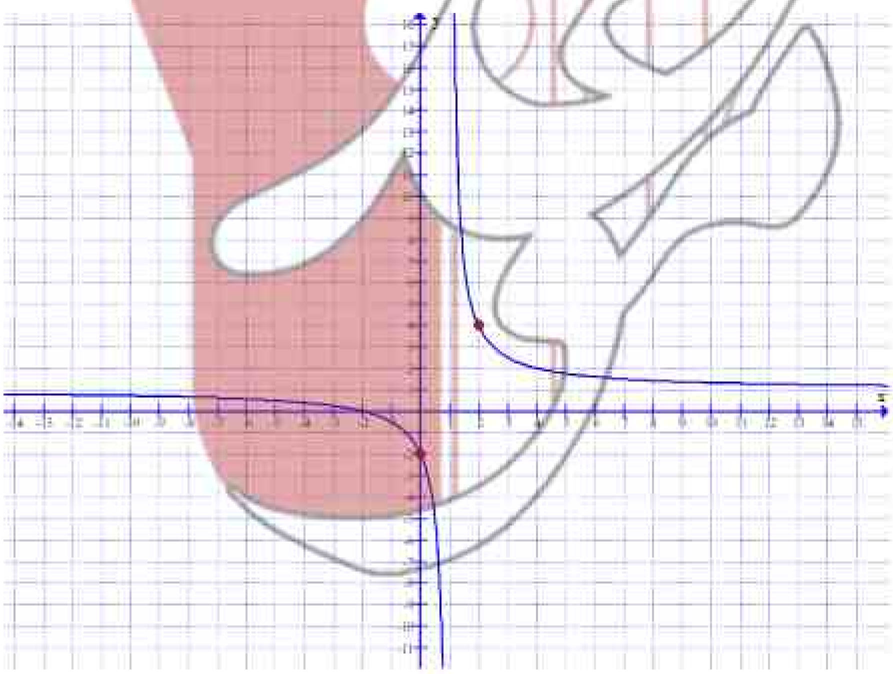
مجانب افقی $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x+۲}{x-۱} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x}{x} = ۱ \to y=۱$

$$f'(x) = \frac{۱(x-۱)-۱(x+۲)}{(x-۱)^۲} = \frac{-۳}{(x-۱)^۲} < ۰$$

نقاط کمکی $(۰,-۲)$ و $(۲,۴)$

جدول تغییرات

x	$-\infty$		۱		$+\infty$
y'		$-$	$\|\|$	$-$	
y	۱	$\searrow$	$-\infty \,\|\|\, +\infty$	$\searrow$	۱



۸

$D_f = R$

$y = x^{۳} + ۳x^{۲} + ۱ \to y' = ۳x^{۲} + ۶x \xrightarrow{y'=۰} ۳x^{۲} + ۶x = ۰ \to ۳x(x+۲) = ۰$

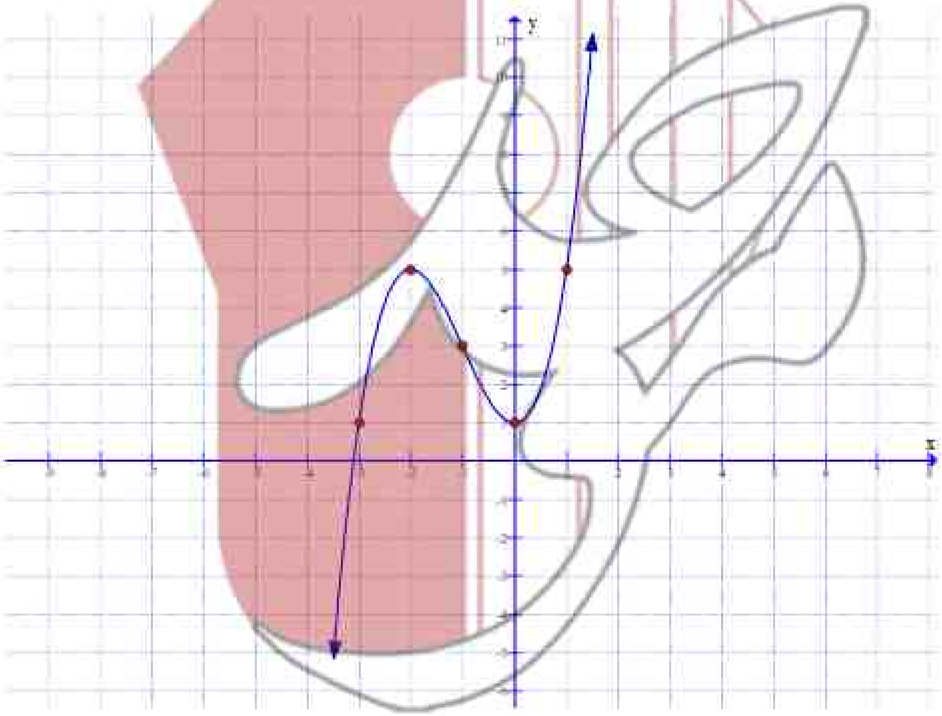
$\to x = ۰ \quad , \quad x = -۲$

$y'' = ۶x + ۶ \xrightarrow{y''=۰} ۶x + ۶ = ۰ \to x = -۱$

x	$-\infty$		-۲		-۱		۰		$+\infty$
y'		+	۰		-		۰	+	
y	$-\infty$	↗	۵ max	↘	۳	↘	۱ min	↗	$+\infty$

$x = -۳ \to y = -۲۷ + ۲۷ + ۱ = ۱ \to A(-۳,۱)$ نقطه‌ی کمکی

$x = ۱ \to y = ۱ + ۳ + ۱ = ۵ \to B(۱,۵)$ نقطه‌ی کمکی

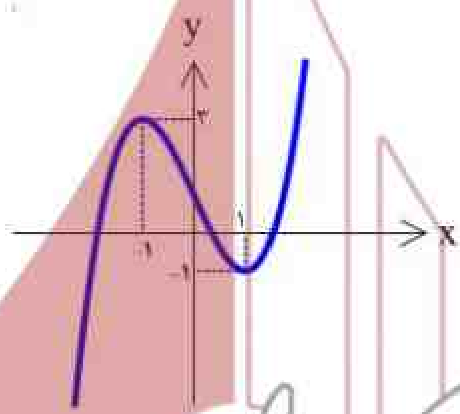


۹

$y' = 3x^2 - 3 \xrightarrow{y'=0} 3x^2 - 3 = 0 \to x = \pm 1$ نقاط بحرانی

$y'' = 6x \xrightarrow{y''=0} 6x = 0 \to x = 0$ نقطه‌ی عطف

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
y'		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y''		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
y	$-\infty$	$\nearrow$	3 max	$\searrow$	1	$\searrow$	-1 min	$\nearrow$	$+\infty$



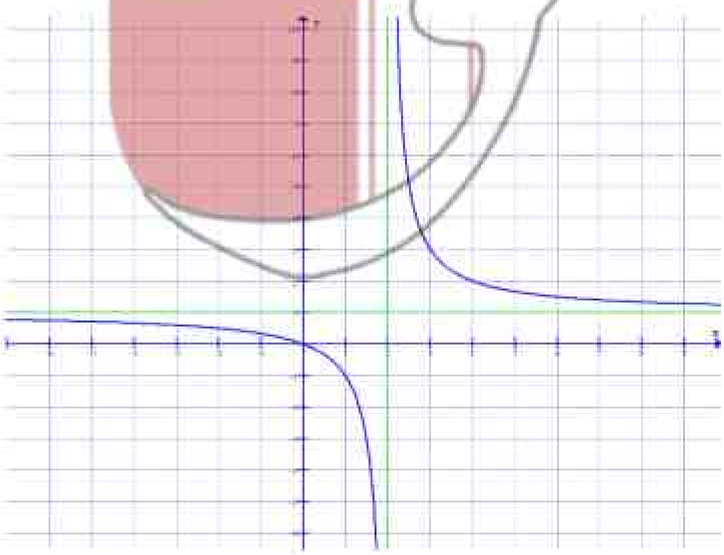
۱۰

$x = 2$ مجانب قائم

$y = 1$ مجانب افقی

$y' = \dfrac{-2}{(x-2)^2} < 0$

x	$-\infty$		0		2		3		$+\infty$
$f(x)$			$-$		‖		$-$		
$f'(x)$	1	$\searrow$	0	$\searrow$ $-\infty$	‖	$+\infty$ $\searrow$	3	$\searrow$	1



۱۱

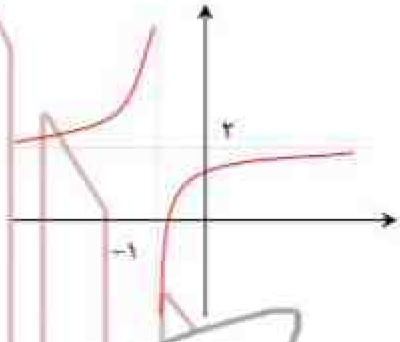
$D_f = R - \{-1\}$ دامنه‌ی تابع

$x+1=0 \rightarrow x=-1$ مجانب قائم

$y = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x-1}{x+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{x} = 2$ مجانب افقی

$f'(x) = \frac{2(x+1)-1(2x-1)}{(x+1)^2} = \frac{3}{(x+1)^2} > 0$ تابع در دو طرف مجانب قائم خود صعودی است.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	2	$\nearrow$	$+\infty$ ‖ $-\infty$	$\nearrow$	2



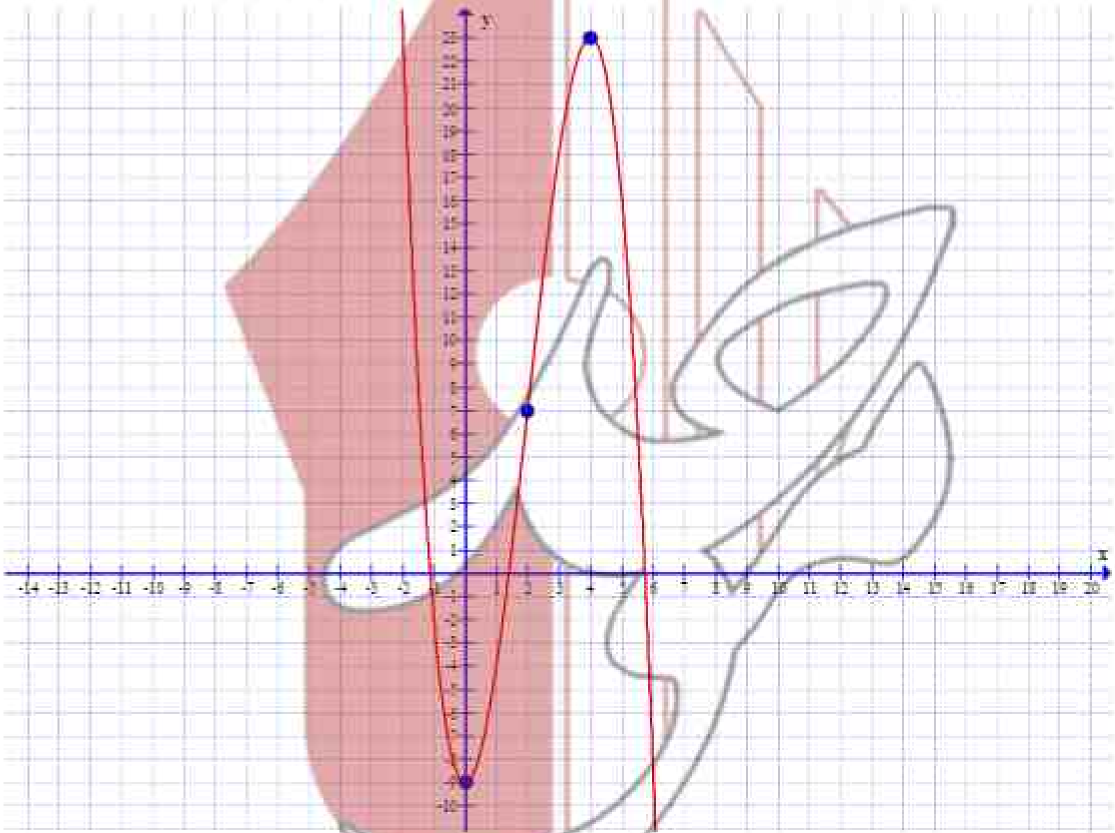
۱۲

$D_f = R$

$f'(x) = -۳x^۲ + ۱۲x \xrightarrow{f'(x)=۰} -۳x^۲ + ۱۲x = ۰ \rightarrow x = ۰\,,\ x = ۴$

$f''(x) = -۶x + ۱۲ \xrightarrow{f''(x)=۰} -۶x + ۱۲ = ۰ \rightarrow x = ۲$

x	$-\infty$		۰		۲		۴		$+\infty$
f'		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	
f		$\searrow$	-۹	$\nearrow$	۷	$\nearrow$	۲۳	$\searrow$	
			min				max		



۱۳

$y'=\frac{۴}{(x+۲)^{۲}}>۰$ و مجانب افقی $y=۱$ و مجانب قائم $x=-۲$

x	$-\infty$	-۲	$+\infty$
y'	$+$	$\|$	$+$
	$\nearrow$ $+\infty$	$\|$	$-\infty$ $\nearrow$